Семинар Московского университета «Школьное математическое образование: содержание и аттестация»

Заседание 24 февраля 2021 г.

«Цифровая трансформация математического образования и аттестации: проблемы и перспективы»

«О современной реализации теории вероятностей в школьном образовании и в ЕГЭ по математике»

Проф. Сергеев Игорь Николаевич

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-29-14192

ЕГЭ-21: кодификаторы требований и элементов содержания

Т: 6. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

6.1. Элементы комбинаторики

- 6.1.1. Поочерёдный и одновременный выбор
- 6.1.2. Формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона

6.2. Элементы статистики

- 6.2.1. Табличное и графическое представление данных
- 6.2.2. Числовые характеристики рядов данных

6.3. Элементы теории вероятностей

- 6.3.1. Вероятности событий
- 6.3.2. Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач

ЭС: 5.4. Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей и статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий

Пространство исходов. 1

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.

Решение, довольно обременительное, но позволяющее немного схитрить.

Все 25 спортсмены по всем 25 местам расставляются P_{25} способами, а с парагвайцем на шестом месте — $9 \cdot \mathrm{P}_{24}$ способами (шестое место заполняем **сначала**), откуда получаем ответ:

$$\frac{9 \cdot \mathrm{P}_{24}}{\mathrm{P}_{25}} = \frac{9 \cdot 24!}{25!} = \frac{9}{25} = 0{,}36$$

Пространство исходов. 1

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.

Решение, упрощённое, даже совсем примитивное.

Из всех 25 претендентов на шестое место имеется ровно 9 парагвайцев, поэтому **ответ**:

$$\frac{9}{25} = 0{,}36.$$

Почему все претенденты на шестое место равновероятны? Ведь этого **не сказано** в условии задачи, а значит, это надо доказывать!

Честная жеребьёвка означает лишь, что равновероятны все перестановки всех 25 прыгунов.

Пространство исходов. 2

В группе туристов 12 человек. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Решение, полностью адекватное формулировке.

Выбрать 3 человека из 12 человек можно всего C_{12}^{3} способами, а выбрать их, не захватив туриста Д., — C_{11}^{3} способами.

Поэтому **ответ**:

$$\frac{C_{12}^{3}-C_{11}^{3}}{C_{12}^{3}}=1-\frac{11!/(3!\cdot 8!)}{12!/(3!\cdot 9!)}=1-\frac{9}{12}=0{,}25.$$

Здесь пространство **исходов** состоит из всех сочетаний из 12 человек по 3 (точнее, по 3 непронумерованным местам).

Пространство исходов. 2

В группе туристов 12 человек. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Решение, более простое, но менее адекватное формулировке.

Разместить 12 человек по 3 пронумерованным местам можно A_{12}^{3} способами, а разместить их без туриста Д. — A_{11}^{3} способами.

Поэтому **ответ**:

$$\frac{A_{12}^{3}-A_{11}^{3}}{A_{12}^{3}}=1-\frac{11\cdot 10\cdot 9}{12\cdot 11\cdot 10}=1-\frac{9}{12}=0{,}25.$$

Здесь уже исходы — это размещения из 12 человек по 3 местам (отличаются от сочетаний общим множителем $3!$).

Пространство исходов. 2

В группе туристов 12 человек. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Решение, совсем простое, но вовсе не адекватное формулировке.

Число вариантов для туриста Д. попасть в 3 выделенных места (отведённых для тех, кто пойдёт в магазин) по отношению к общему числу 12 мест (для всей группы) даёт **ответ** (почему-то такой же!)**:**

$$\frac{3}{12} = 0{,}25.$$

А здесь исходы — это 12 потенциальных мест для туриста Д. с выделенными среди них 3 местами.

Модель совершенно **другая**, но ответ-то тот же!

Подмена исходов. 1

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что 5-рублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Решение, строго соответствующее формулировке.

Число способов из 6 данных монет выбрать 3 монеты ровно с одним пятаком по отношению к числу всех способов выбрать 3 монеты из 6 — это **ответ:**

$$\frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3/2!}{6 \cdot 5 \cdot 4/3!} = \frac{3}{5} = 0{,}6 \left(= \frac{C_6^3 - C_4^3 - C_4^1}{C_6^3} \right).$$

Базового ли уровня такое решение?

Подмена исходов. 1

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя, не глядя, переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что 5-рублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

Решение, совсем простое, но искусственное, без доказательства.

Фиксируем карман, в который **попал** первый пятак. Тогда для второго пятака есть 2 места в том же кармане и 3 места в другом кармане, поэтому **ответ** на вопрос задачи — такой (кстати, верный)**:**

$$\frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Откуда же следует, что все 5 мест для второго пятака равновероятны? Ведь если второй пятак окажется в том же кармане, то дальше нужно будет выбирать 1 из 4 гривенников, а если в другом — то 2 из 4.

Подмена исходов. 2

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Решение, совсем простое, но искусственное, без доказательства.

Фиксируем место, **занятое** Анатолием Москвиным. Тогда на место в пару к нему имеется 75 претендентов, из которых 6 россиян, поэтому **ответ** такой**:**

$$\frac{6}{75} = 0{,}08.$$

Откуда опять же следует, что все 75 претендентов на место в пару к Анатолию Москвину равновероятны?

Не слишком ли **вольны** наши рассуждения?

Подмена исходов. 2

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Решение, теперь не только искусственное, но даже и неверное.

Фиксируем место, **занятое** Анатолием Москвиным, а также 5 мест, **занятые** теми 5 россиянами, которые оказались **не в паре** с ним (такие точно найдутся!). Тогда на место играть в паре с ним остаётся 70 претендентов, из которых только 1 россиянин, поэтому **ответ:**

$$\frac{1}{70} = 0{,}0(142857).$$

Рассуждения очень **похожи** на предыдущие, но неверны. Где грань?

Подмена исходов. 3

На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

Решение, совершенно искусственное, но другое трудно придумать.

Фиксируем 3 места, **занятые** Данией, Швецией и Норвегией. Тогда из всех $P_3 = 6$ перестановок этих стран по 3 фиксированным местам в $P_2 = 2$ перестановках Дания стоит последней, поэтому **ответ:**

$$\frac{2}{6} = 0,(3) \approx 0{,}33.$$

В основе этого рассуждения лежит **разбиение** на группы. Но ведь этому школьников надо сначала научить!

Условная вероятность. 1

В кармане у Дани было пять конфет — «Ласточка», «Взлётная», «Василёк», «Грильяж» и «Гусиные лапки», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Даня случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что упала конфета «Взлётная».

Решение, видимо, подразумевается такое: 1 случайная конфета из 5 возможных выпадает с вероятностью

$$\frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Однако ведь в условия задачи явно сказано, что конфета уже упала. Поэтому искомая вероятность — условная, и правильный **ответ** такой:

1, если упала «Взлётная»; 0, если упала не «Взлётная».

Только как это записать в **формате ЕГЭ**?

Условная вероятность. 2

В фирме такси в данный момент свободно 15 машин: 3 чёрных, 6 жёлтых и 6 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет жёлтое такси.

Решение, похоже, имеется в виду такое: 6 жёлтых такси из 15 возможных машин дают вероятность

$$\frac{6}{15} = 0{,}4.$$

Однако в задаче явно сказано, что выбор машины уже произошёл. Поэтому искомая вероятность — условная, и правильный **ответ** такой:

1, если выехало жёлтое такси; 0, если выехало не жёлтое такси.

А не имеется ли здесь в виду, что выехавшая машина может с положительной вероятностью **не дохать** до заказчика?

Условная вероятность. 3

В случайном эксперименте бросили игральный кубик 2 раза. Известно, что сумма очков равна 9. Найдите вероятность того, что во второй раз выпало количество очков, меньшее, чем 5.

Решение, похожее на **подразумевавшееся** авторами.

Исходами здесь служат 36 упорядоченных числовых пар (x, y), где $x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}$, а событию «$x + y = 9$» благоприятствуют в точности следующие 4 исхода: $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$ и $(6,3)$. Из них событию «$y < 5$» благоприятствуют 2 исхода, поэтому **ответ**:

$$\frac{2}{4} = 0{,}5.$$

Однако тут оба события уже произошли, поэтому опять искомая вероятность — условная (даже дважды), а правильный **ответ** такой:

1, если $y < 5$; *0, если* $y \geq 5$.

Исходы и частота. 1

В среднем из 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 27 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Решение. Доля неподтекающих насосов равна

$$\frac{27}{900} = 0{,}03,$$

а значит, **ответ**: $1 - 0{,}03 = 0{,}97$.

Какую роль в условии задачи играет словосочетание ***в среднем***? О каком усреднении для указанных (поступивших) насосов идёт речь?

Обычно **принято** выражать частоту не перечислением **всех исходов** типа: *поступило 900 насосов, из них 27 подтекают*, а **в процентах** типа: *в среднем на каждые 100 насосов приходится 3 подтекающих*.

Здесь выбрано нечто среднее между двумя принятыми вариантами.

Исходы и частота. 2

Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию
A = «сумма очков равна 5»?

Решение. Исходами здесь служат 36 упорядоченных пар чисел (x, y), где $x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}$, а данному событию A благоприятствуют в точности следующие 4 исхода: $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$ и $(4,1)$. **Ответ**: 4.

Есть **исходы** ω (это точки пространства Ω всех исходов), а есть **события**, соответствующие различным подмножествам $\mathrm{A} \subset \Omega$. Среди них выделяют **элементарные события** (атомы), соответствующие одноэлементным множествам (состоящим из одного исхода).

А словосочетание элементарный исход — это просто *масло масляное*!

Для полноты: ещё каждое событие A имеет **вероятность** (меру) $P(A)$.

Исходы и частота. 3

В мешок Деда Мороза, содержащий 2 коробки с подарками, опущена красная коробка с подарком, после чего из него наудачу извлечена одна коробка. Найдите вероятность того, что извлечённая коробка окажется красной, если равновозможны все возможные предположения о первоначальном составе коробок с подарками (по цвету). Ответ округлите до сотых.

Решение. Есть **2 варианта** толкования условия, а именно: когда коробки

1) пронумерованы, тогда 4 варианта: (н,н), (к,н), (н,к), (к,к) — и **ответ**:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}\right)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}(\approx 0{,}67);$$

2) не пронумерованы, тогда 3 варианта: {н,н}, {к,н}, {к,к} — и **ответ**:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}\right)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Ответы почему-то (вопреки интуиции докладчика) совпадают!

Операции с событиями. 1

Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Решение. Из равенства

$$P(T > 1) = P(T > 2) + P(1 < T < 2)$$

где T — время службы сканера, получаем **ответ:**

$$P(1 < T < 2) = P(T > 1) - P(T > 2) = 0{,}94 - 0{,}87 = 0{,}07.$$

Есть неточность: в сумме пропущено слагаемое $P(T = 2)$, которое для случайной величины T ничтожно мало (его можно считать нулевым).

Но ведь этот вывод требует от школьника определённой культуры. А как он может это установить, опираясь лишь **на условие** задачи?

Лучше бы вместо *меньше двух лет* написать ***не больше двух лет***.

Операции с событиями. 2

Один из автоматов в ресторане быстрого питания продаёт кофе, второй — булочки. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,25, а вероятность того, что во втором автомате закончатся булочки, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня посетитель сможет купить в этом ресторане кофе с булочкой.

Решение. Используя формулу произведения вероятностей, получаем **ответ**:

$$P(\text{КБ}) = P(\text{К}) \cdot P(\text{Б}) = 0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6.$$

Но ведь события явно зависимы! Действительно, кому понадобится булочка без кофе?

Операции с событиями. 3

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в данном автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Используя формулу включений-исключений, получаем **ответ**:

$$P(A_1A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 + A_2) = 2 \cdot 0{,}7 - 0{,}88 = 0{,}52.$$

Кстати, в случае независимости автоматов получилось бы

$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49.$$

ЕГЭ-22: перспективная модель

2.1. В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов. Только в двух билетах встречается вопрос о грибах. На экзамене выпускнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете будет вопрос о грибах.

2.2. Вероятность того, что мотор холодильника прослужит более 1 года, равна 0,8, а вероятность того, что он прослужит более 2 лет, равна 0,6. Какова вероятность того, что мотор прослужит более 1 года, но не более 2 лет?

10.1. Симметричную игральную кость бросили три раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало три очка»?

10.2. В городе 48% взрослого населения мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причем доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для проведения исследования социологи случайным образом выбрали взрослого мужчину, проживающего в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

См. также **Сергеев И.Н., Панфёров В.С. Перспективный демонстрационный вариант ЕГЭ по математике профильного уровня // Математика в школе, 2021, №1, с. 3-9.**

Заключение. 1

Трудности и ошибки в реализации вероятностного подхода в школьных задачах:

1) неоднозначное описание пространства **исходов**;
2) слишком **трудное** честное решение, допускающее правильный ответ при **халтурном** подходе (при отсутствии обучения ему и должного обоснования);
3) неточности в **терминологии** (псевдо-усреднение, элементарные исходы);
4) математические неточности формулировок:
   - применение понятия вероятности к **свершившемуся** событию (получается условная вероятность);
   - **неудачная реализация** вероятностной ситуации (игнорирование зависимости событий);
   - необоснованное отбрасывание **критических** событий.

Заключение. 2

Разделы теории вероятности (и сопутствующие им), доступные в школе:

1) **частота** и вероятность: опытные данные, их характеристики (5-9);
2) **классическая** модель вероятности: равновероятные исходы, случайное событие, вероятность, сумма и произведение вероятностей, формула включений-исключений (5-9);
3) **комбинаторика**: перестановки, размещения, сочетания, они же с повторениями (5-9);
4) **аксиоматическая** модель вероятности (общая): пространство исходов, алгебра событий, вероятностная мера (10-11);
5) **зависимые** и независимые события, условная вероятность, полная вероятность, формула Байеса (10-11);
6) **схема Бернулли**, бином Ньютона (10-11);
7) **геометрические** модели вероятности: на отрезке, на окружности, в прямоугольнике, в круге (10-11);
8) **случайная величина**, её характеристики (10-11).

Из ФГОС по среднему общему образованию

— требования к предметным результатам освоения **базового** курса математики должны отражать:

- сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

— требования к предметным результатам освоения **углубленного** курса математики должны **включать** требования к результатам освоения базового курса и **дополнительно** отражать:

- владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; исследования случайных величин по их распределению.

Спасибо за внимание!