

Перечислительная  
комбинаторика  
в начальной школе

# Комбинаторика в школе

В алгебре и теории вероятностей естественно возникают комбинаторные задачи.

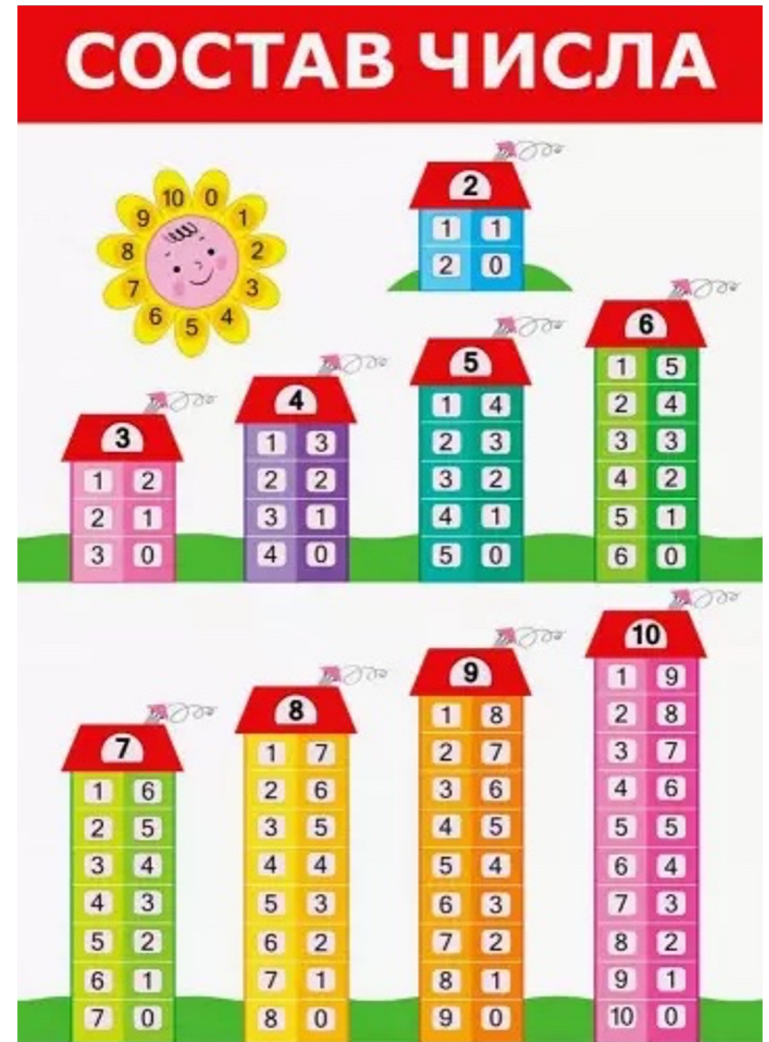
В 7-11 классах можно работать с большими числами и сложными формулами, но у детей нет представления о том, какого рода объекты мы собираемся пересчитывать.

Большим детям странно предлагать выстроить в ряд грушу, сливу и яблоко всеми 6 способами, а без этого непонятно, о чем речь.

# Комбинаторика в начальной школе

Для комбинаторики в начальной (и не только) школе нет внятного понятийного аппарата.

Что такое “состав числа”?



# Мешки (мульти-множества) или цепочки (конечные последовательности)?

Состав числа 7 - это все пары чисел с суммой 7.

Более точно, это мешок цепочек из двух чисел с суммой 7.

| - 3 - 4 →  
| - 4 - 3 →

| - 1 - 6 →  
| - 6 - 1 →

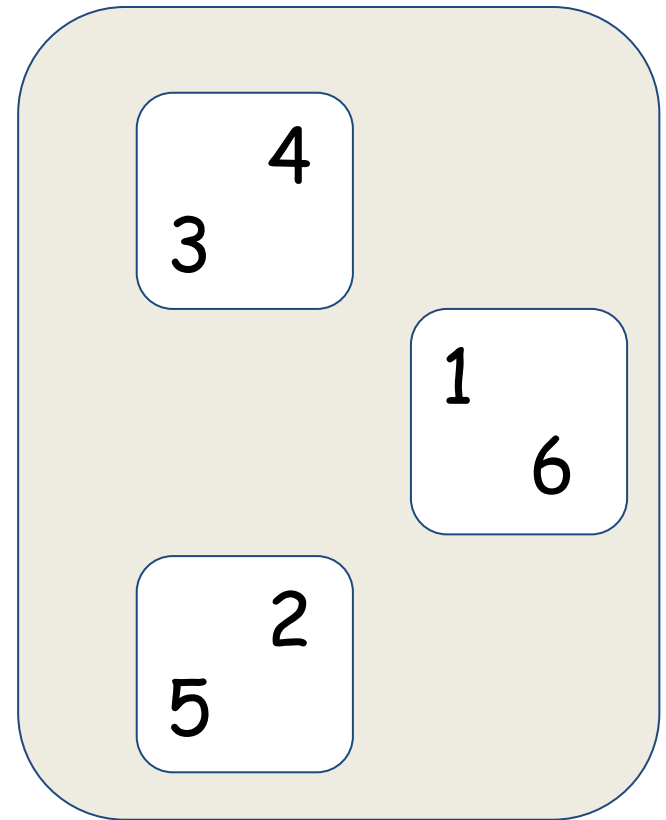
| - 2 - 5 →  
| - 5 - 2 →

# Мешки или цепочки?

Состав числа 7 - это все пары чисел с суммой 7.

Более точно, это мешок цепочек из двух чисел с суммой 7.

Или мешок мешков из двух чисел с суммой 7.



# Цепочка

У цепочки есть первый и последний элемент.

Для каждого элемента, кроме последнего, можно указать следующий за ним.

Для каждого элемента, кроме первого, можно указать предыдущий перед ним.

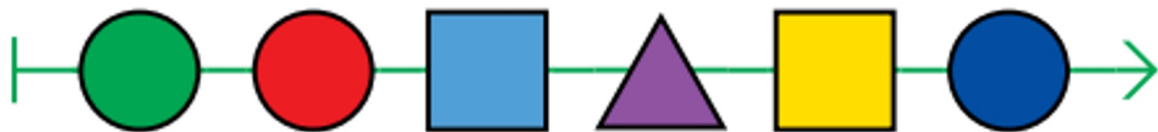
Тимоша нанизывал бусины на нитку. Сначала он нанизал зелёную бусину:



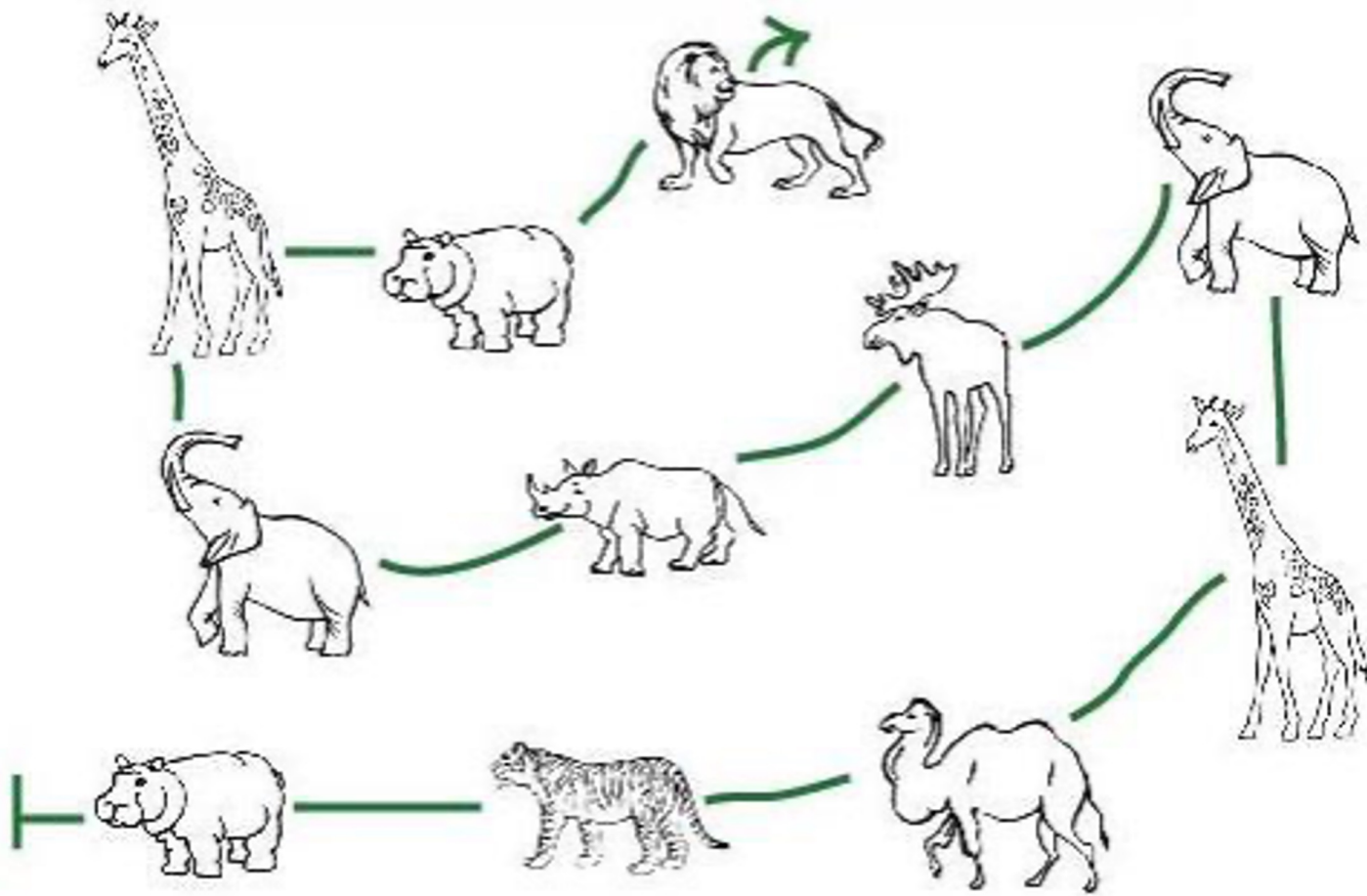
Затем Тимоша нанизал красную бусину, потом – голубую:



Потом Тимоша нанизал фиолетовую, жёлтую и синюю бусины. Получилась цепочка:



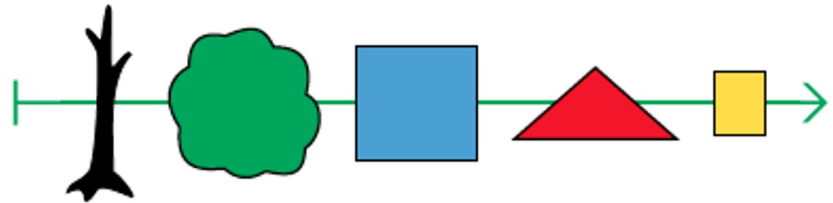
# Цепочка





Дети делали аппликации.

Коля наклеил детали в таком порядке:



Какую из аппликаций сделал Коля?

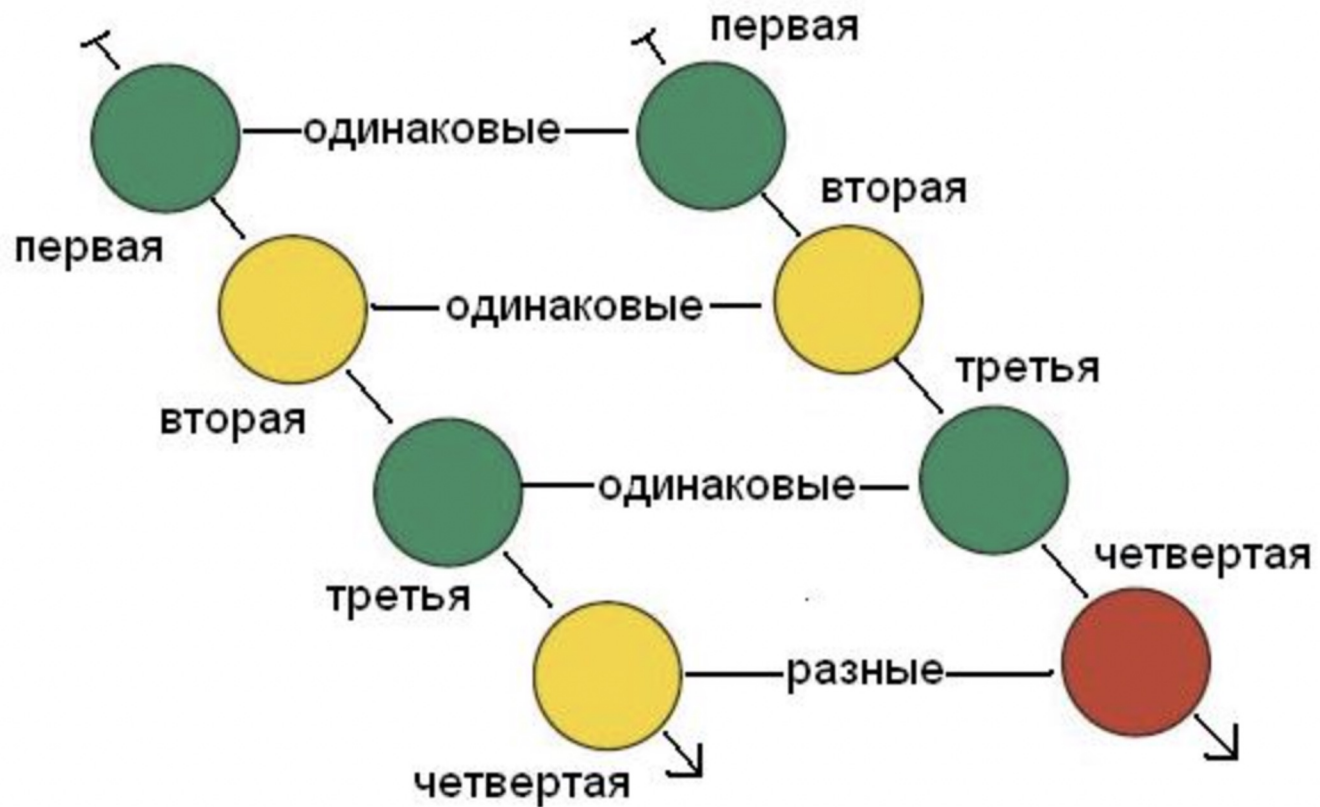
пример  
задания на  
цепочку  
действий



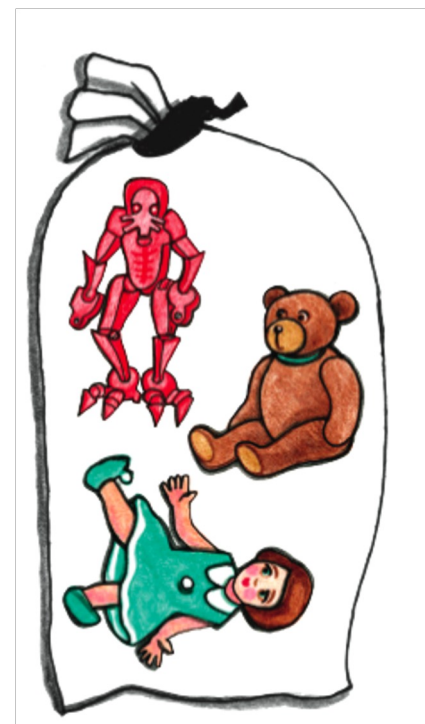
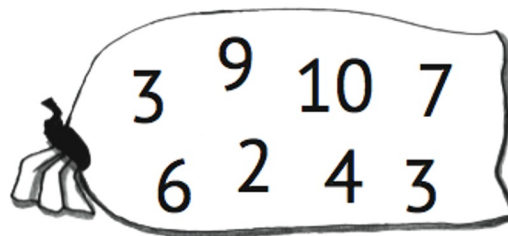
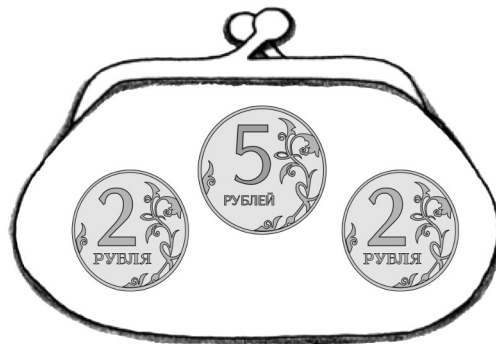


Какой квадрат наклеили  
четвёртым?

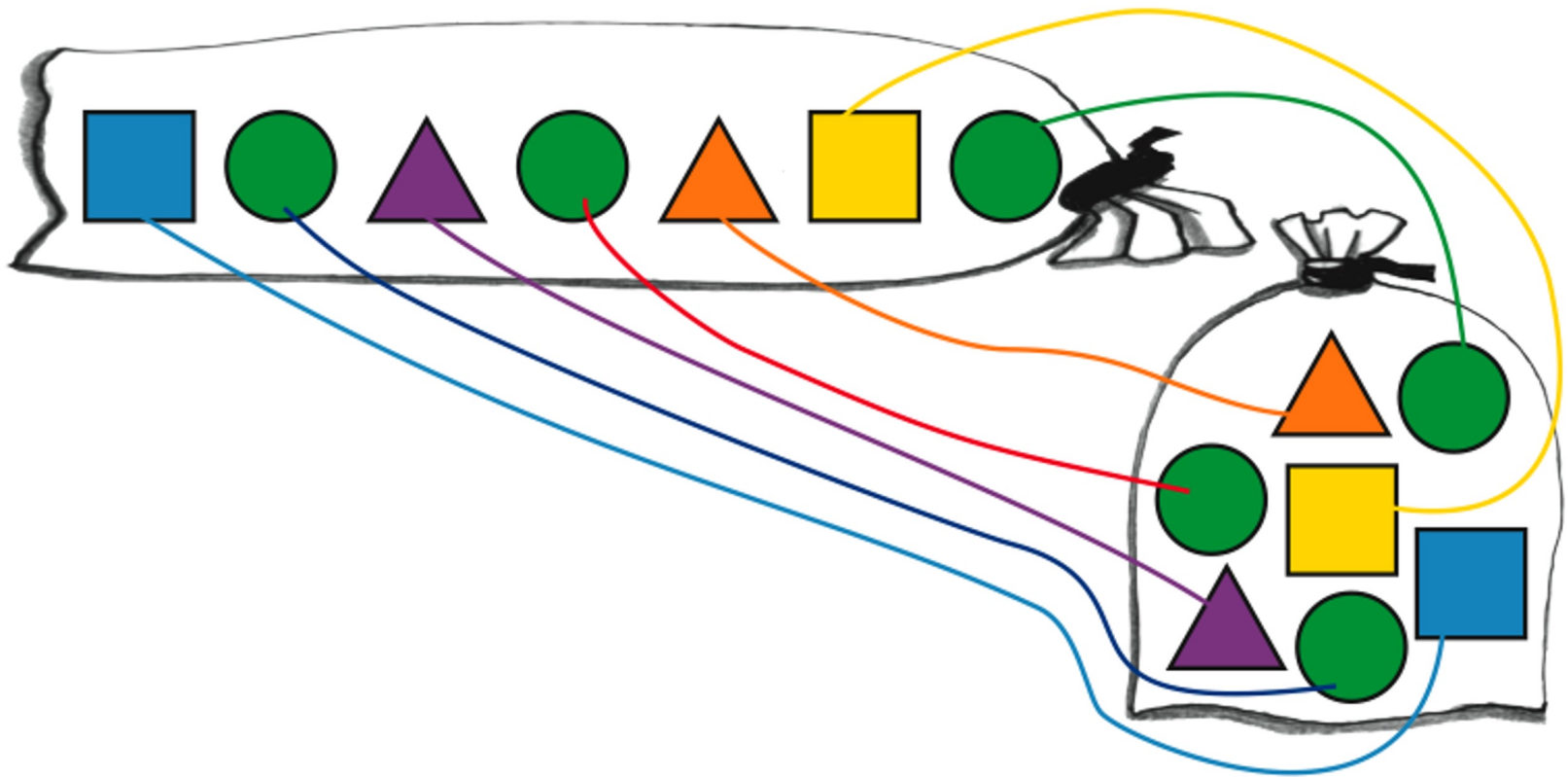
# Одинаковые цепочки



# Мешки



# Одинаковые мешки



# Групповая работа и задачи на поиск одинаковых

# Поиск одинаковых мешков

Найдите два одинаковых мешка





# Поиск одинаковых мешков

Ариша искала два одинаковых мешка.





# Поиск одинаковых мешков

Сначала она вырезала все мешки. Потом Ариша положила слева мешки, где есть , а справа – мешки, где нет .



есть  есть 



есть  нет 



нет  есть 

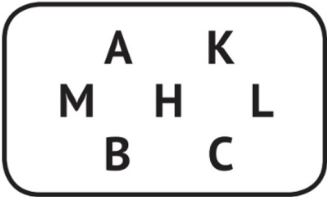


нет  нет 

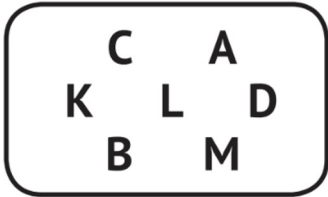


# Найди одинаковые мешки

П1



П2



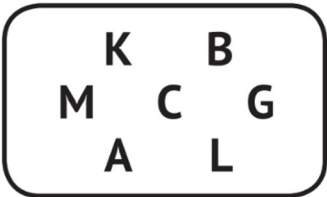
П3



П4



П5



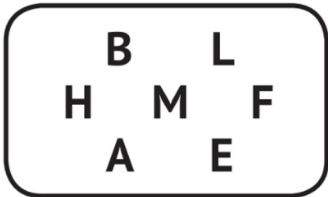
П6



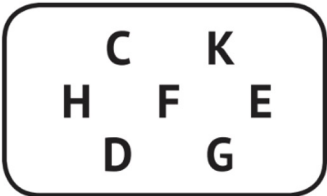
П7



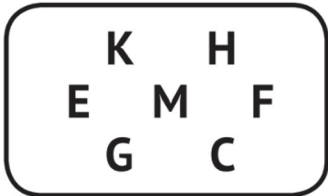
П8



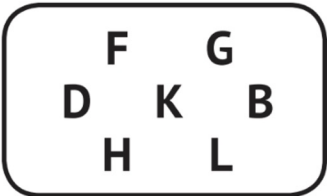
П9



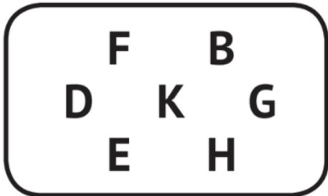
П10



П11



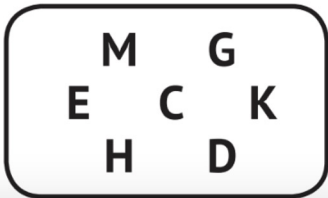
П12



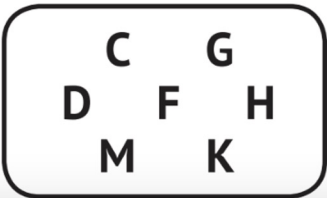
П13



П14



П15



П16



# Перевод комбинаторных задач на язык мешков и цепочек

# Перечислительная комбинаторика

Раздел [комбинаторики](#), который рассматривает задачи перечисления, построения и [перебора](#) различных конфигураций, образуемых элементами конечных множеств, на которые могут накладываться определённые ограничения, такие как: различимость или неразличимость элементов, возможность повторения одинаковых элементов и пр.

- Википедия

# Комбинаторная задача

Сколькими способами можно разбить число 10 в сумму упорядоченных слагаемых?

Что это значит?

# Перевод на язык мешков и цепочек

Сколькими способами можно разбить число 10 в сумму упорядоченных слагаемых?

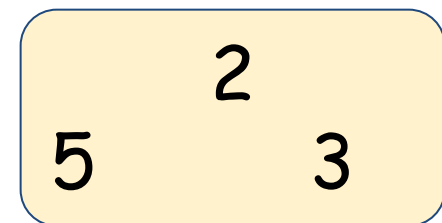
1. Можно перечислить все цепочки слагаемых с суммой 10, упорядоченных по возрастанию.

$$|- 2 - 3 - 5 \rightarrow$$

2. Можно перечислить все цепочки слагаемых с суммой 10.

$$|- 3 - 2 - 5 \rightarrow$$

3. Можно перечислить все мешки с суммой 10.



# Типичная комбинаторная задача

Перечислите все способы:

- разложить 10 кусков сахара по 3 стаканам
- разложить 10 кусков сахара по 3 чашкам
- разложить 10 ложек по 3 стаканам
- разложить 10 ложек по 3 чашкам

В этой задаче: чашки разные, стаканы одинаковые;  
ложки разные, куски сахара одинаковые.



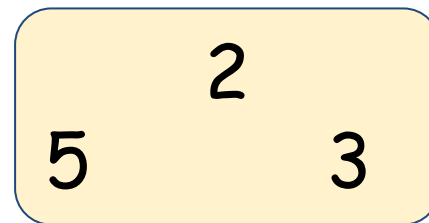
# Перевод на язык мешков и цепочек

Перечислите все способы:

- разложить 10 кусков сахара по 3 стаканам

Поскольку куски сахара одинаковы, нас интересует только количество кусков сахара в каждом стакане

Таким образом, нужно сложить  
в мешок три числа с суммой 10



# Перевод на язык мешков и цепочек

Перечислите все способы:

- разложить 10 кусков сахара по 3 чашкам

Поскольку куски сахара одинаковы, нас интересует только количество кусков сахара в каждой чашке

Таким образом, нужно выписать  
в цепочку три числа с суммой 10

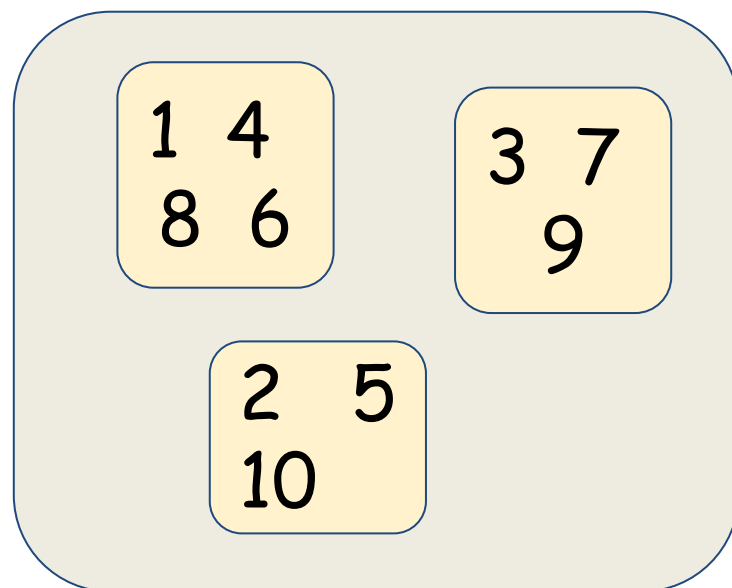
| - 3 - 2 - 5 →

# Перевод на язык мешков и цепочек

Перечислите все способы:

- разложить 10 ложек по 3 стаканам

Нужно сделать мешок  
из трех мешков, в которые  
разложить, например,  
номера ложек от 1 до 10

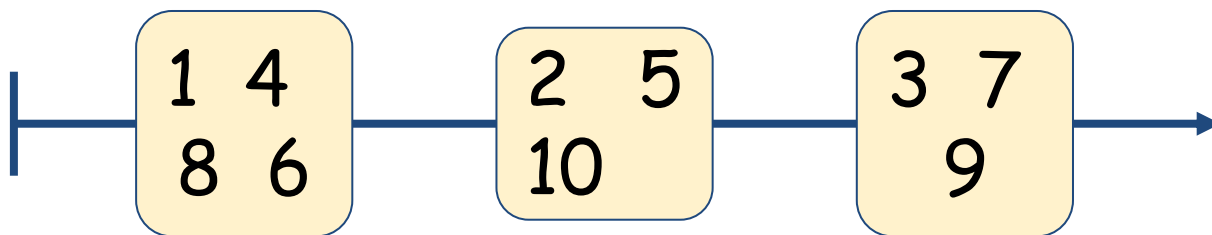


# Перевод на язык мешков и цепочек

Перечислите все способы:

- разложить 10 ложек по 3 чашкам

Нужно сделать цепочку из 3 мешков, в которые разложить номера ложек от 1 до 10



Разноуровневое обучение  
в рамках единых учебных тем

# Сильный и слабый ученик в одном классе

- Традиция математических кружков и олимпиад
- Кропотливая работа со слабыми и немотивированными школьниками
- Что делать с теми и другими детьми в одном классе?

# Разноуровневое обучение

- Движение по линии обязательного минимума должно быть достаточно медленным.
- “Сильные” дети не должны скучать.  
Но будет не очень правильно, если они “убегут” вперёд по программе.
- Необязательные задачи должны возникать как развитие обязательных тем.

# Анализ и синтез

- Анализ качественных и количественных свойств объекта.
- Создание объекта с заданными свойствами.
- Перечисление всех возможных объектов с заданными свойствами.

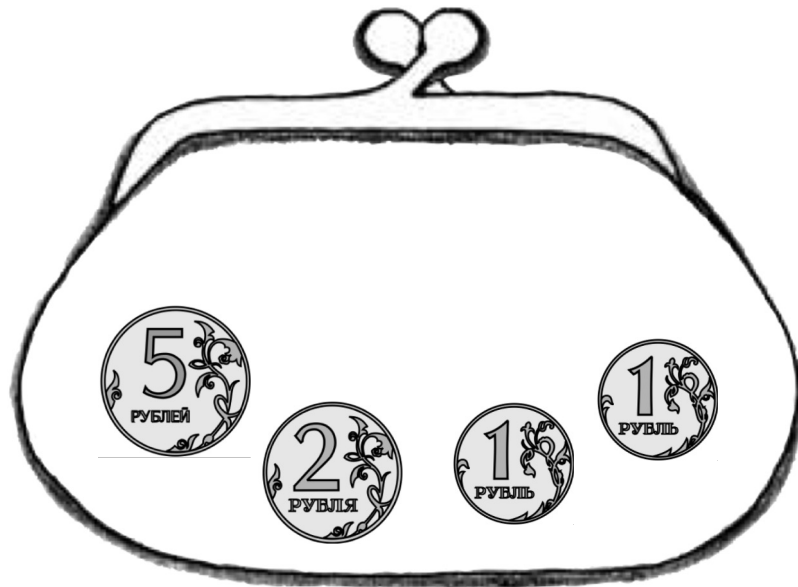


# Задачи с монетами










# Анализ

- Сколько монет в кошельке?
- Сколько денег в кошельке?



# Синтез

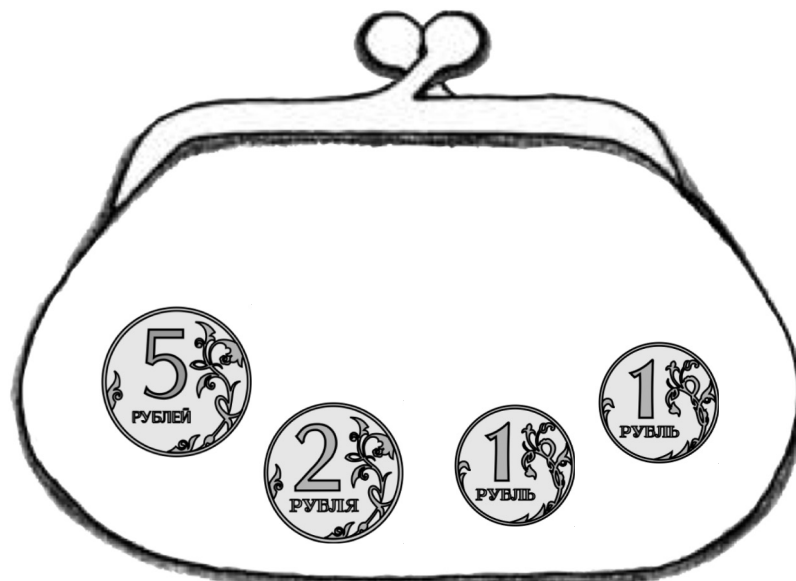
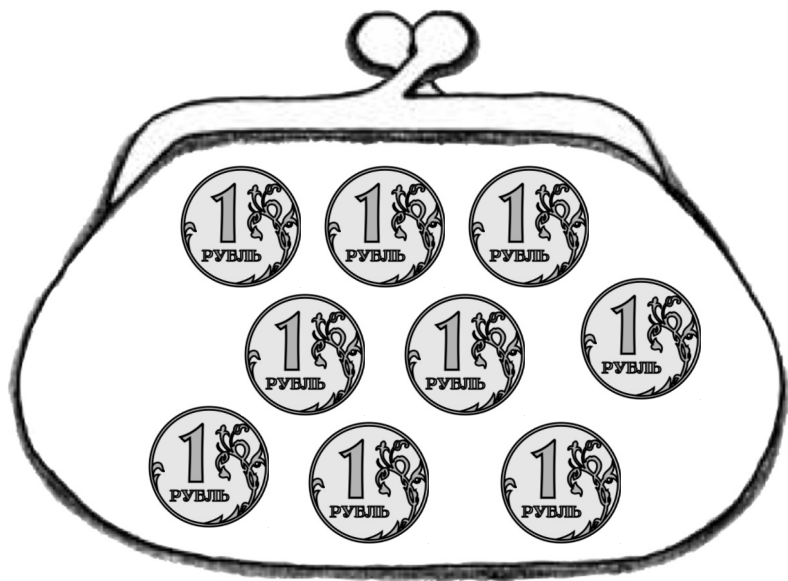
	 <span data-bbox="672 362 799 419">8 руб.</span>	 <span data-bbox="1031 362 1159 419">9 руб.</span>	 <span data-bbox="1379 362 1506 419">10 руб.</span>
3 МОНЕТЫ	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
4 МОНЕТЫ	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	   	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
5 МОНЕТ	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>
6 МОНЕТ	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>

# Как можно заплатить 9 рублей?








В кошельке 9 рублей.

Сколько каких монет  
лежит в кошельке?









Перечисли все варианты.










# Классификация
















# Классификация

# Классификация

# Все кошельки



# Индивидуальные результаты

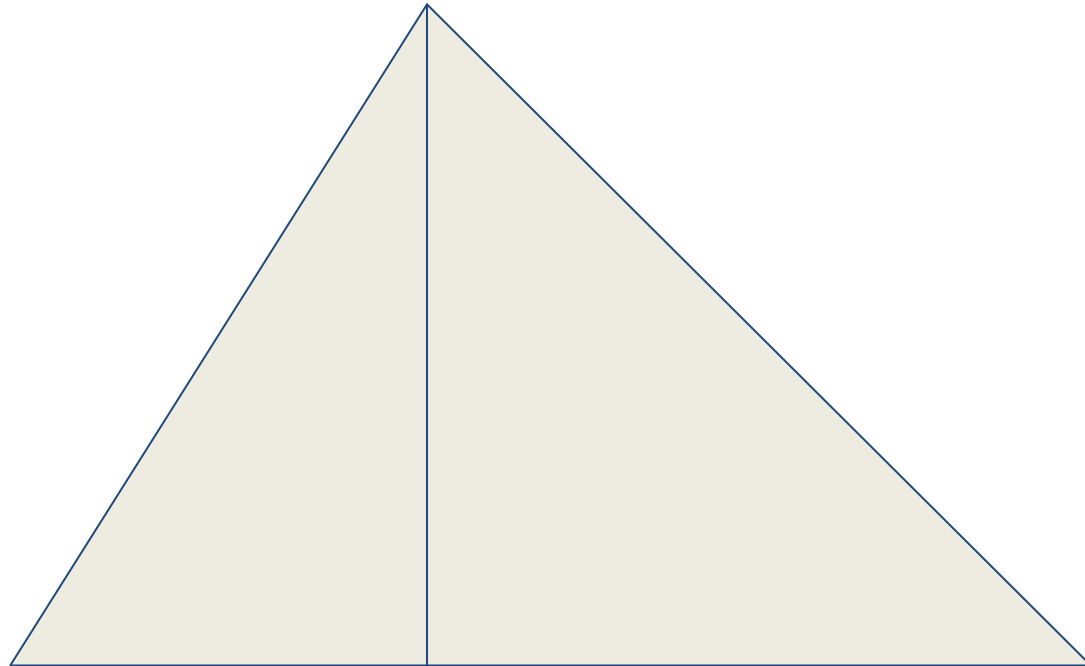
- Кто-то из детей сосчитал 9 монет.
- Кто-то из детей несколько раз сложил набор чисел с суммой 9.
- Кто-то из детей придумал признаки для классификации и составил таблицу.
- Кто-то из детей научился пользоваться таблицей для систематического перебора.

# 36 рублей монетами в 10, 5 и 2 руб

	Нет 5-руб. монет	⑤ · 1	⑤ · 2	⑤ · 3	⑤ · 4	⑤ · 5	⑤ · 6
Нет 10-руб. монет	② · 18						
⑩ · 1					⑩ · 1 ⑤ · 4 ② · 3		
⑩ · 2							
⑩ · 3							X

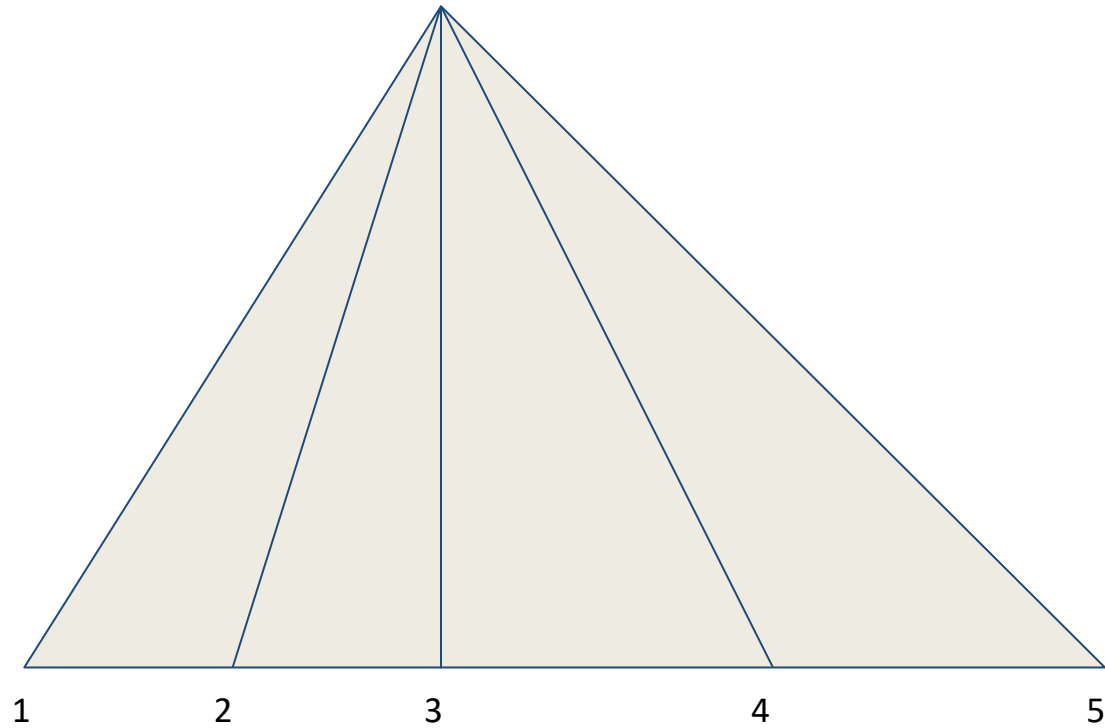
# Геометрическая зоркость

Сколько здесь треугольников?

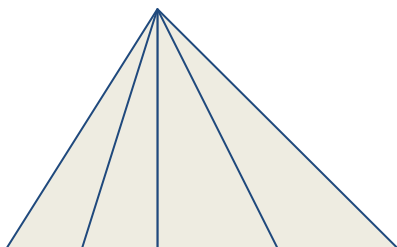
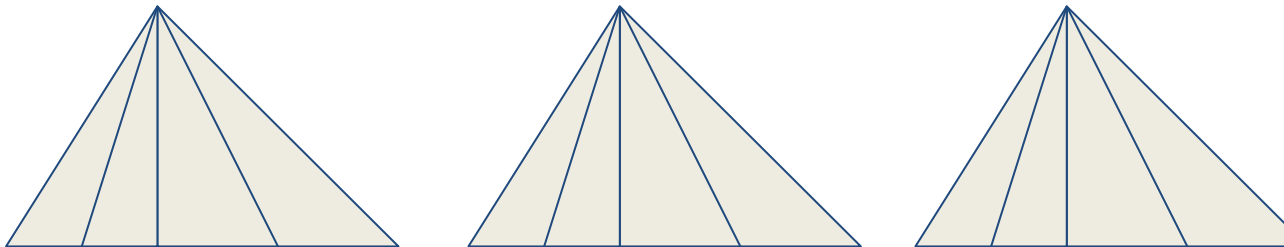
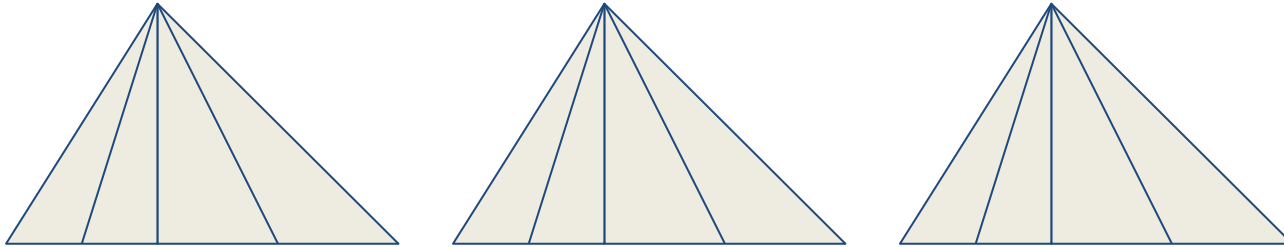
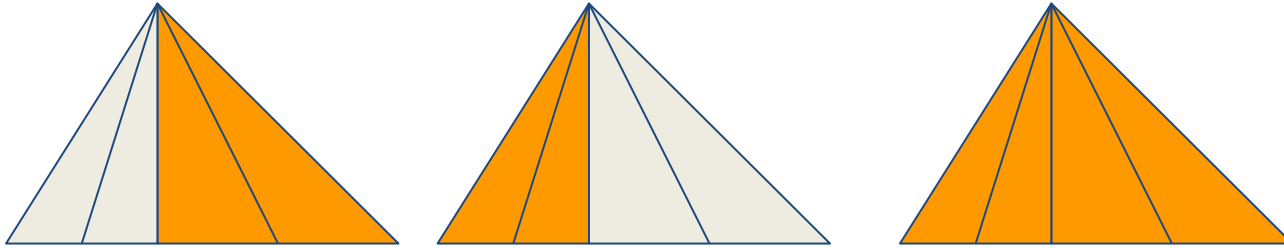


# Считаем треугольники

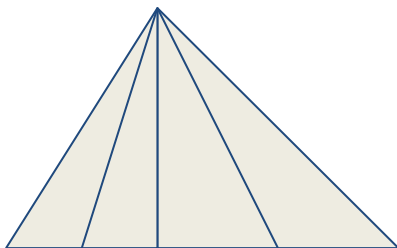
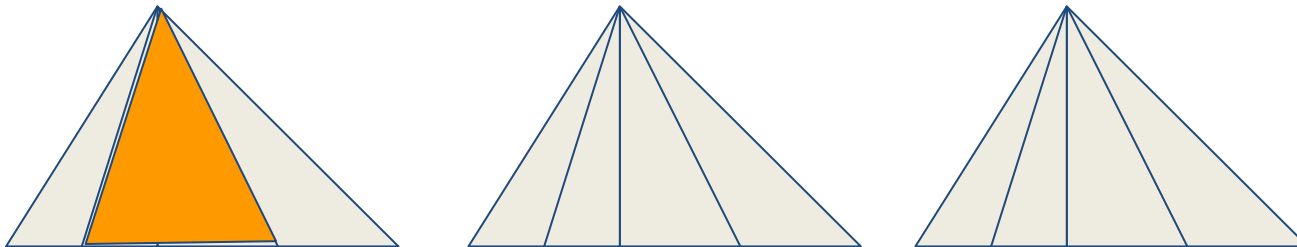
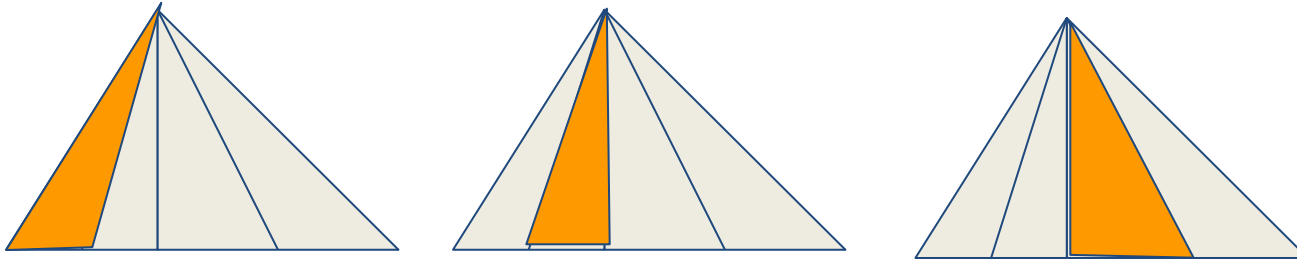
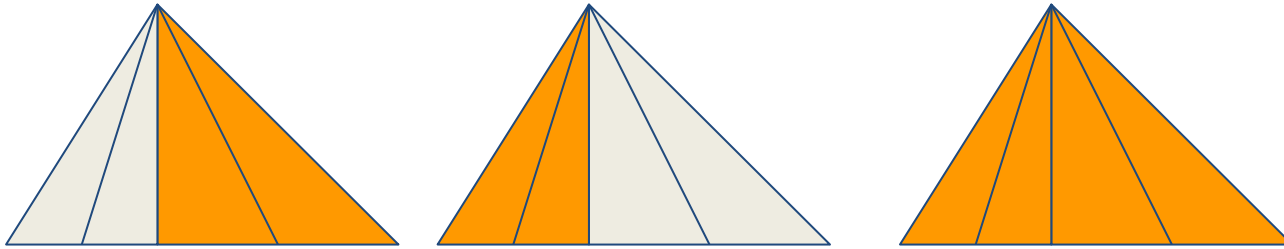
А здесь сколько треугольников?



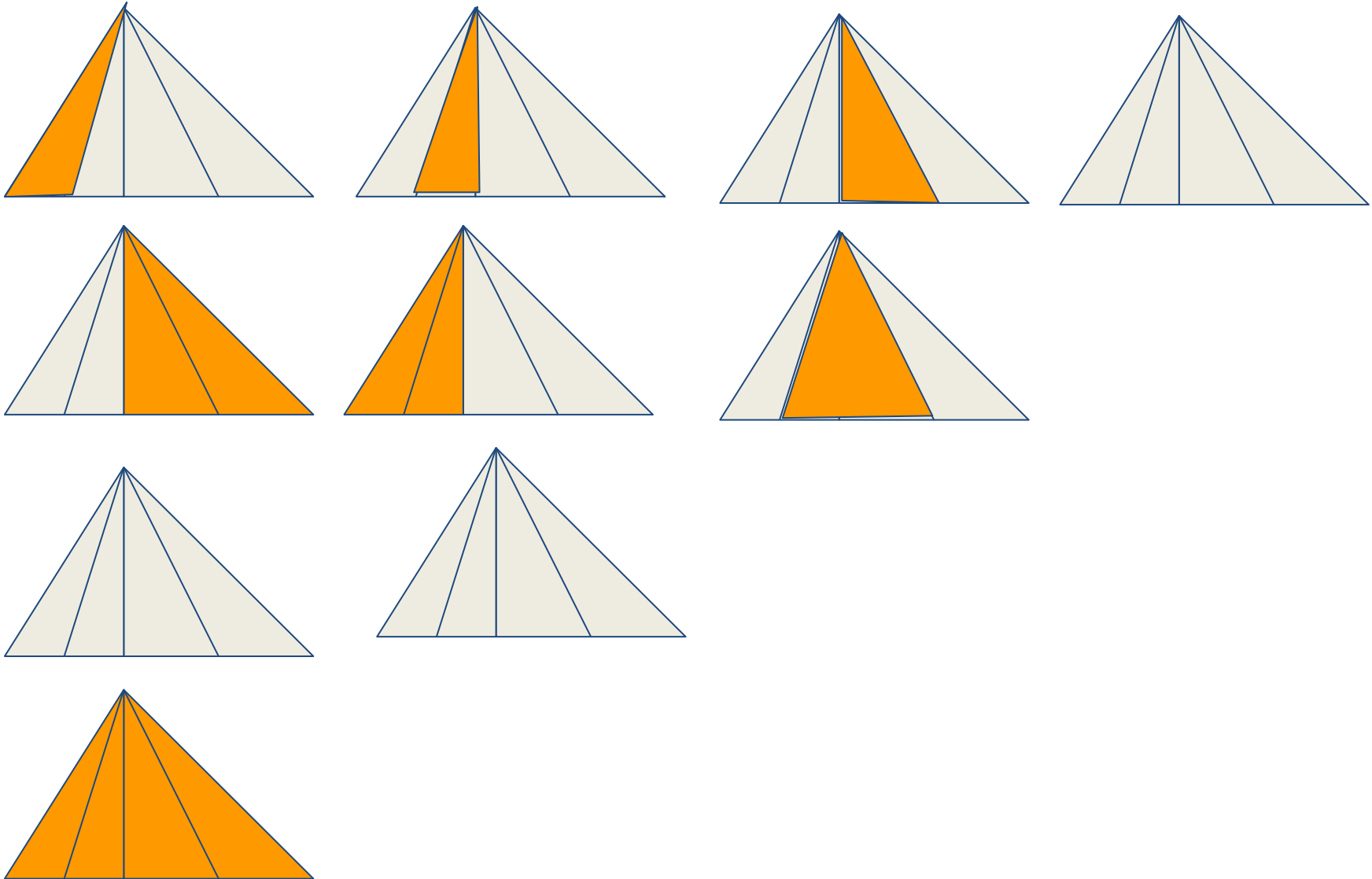
# Перечисляем треугольники



# Перечисляем треугольники



# Перечисляем треугольники

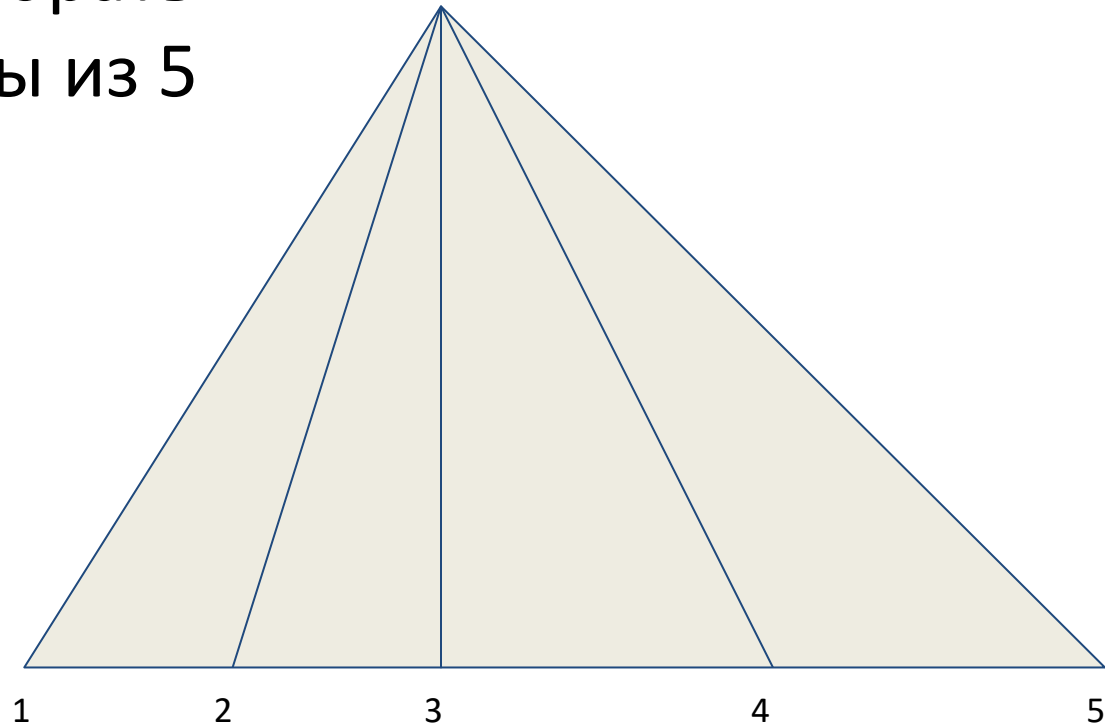


# Перечисляем треугольники

А здесь сколько?

Нужно выбрать

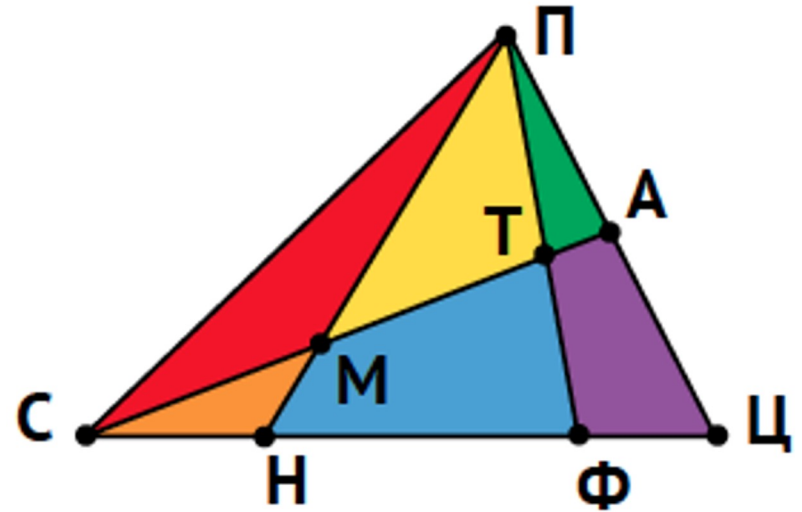
2 вершины из 5





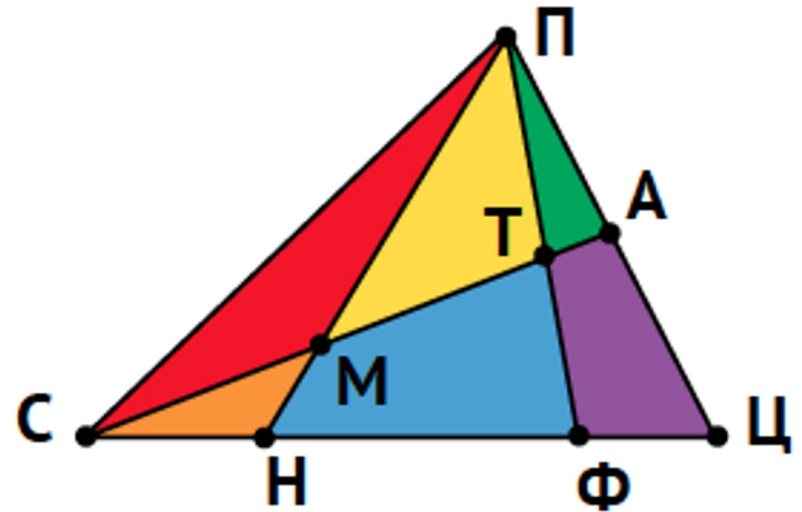
# Перечисляем треугольники

Перечислите  
все треугольники,  
изображённые  
на этом чертеже.



# Перечисляем треугольники

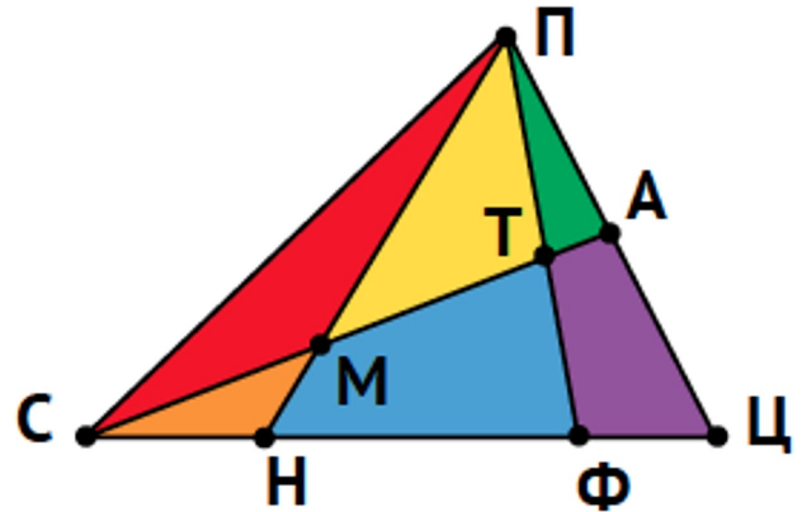
Перечислите  
все треугольники,  
изображённые  
на этом чертеже.



Из одной области: 4 треугольника (есть всего 6 областей).

# Перечисляем треугольники

Перечислите  
все треугольники,  
изображённые  
на этом чертеже.

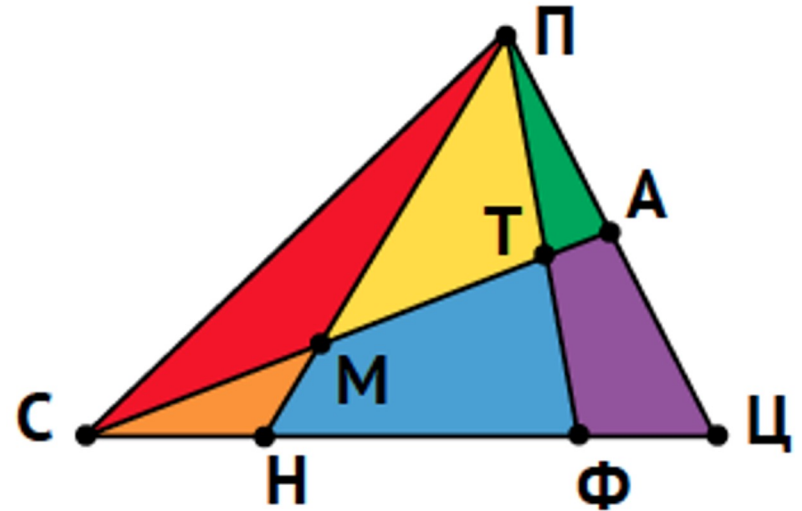


Из одной области: 4 треугольника (есть всего 6 областей).

Из двух областей: 6 треугольников (есть всего 7 возможных  
перемычек, то есть общих сторон двух областей).

# Перечисляем треугольники

Перечислите  
все треугольники,  
изображённые  
на этом чертеже.



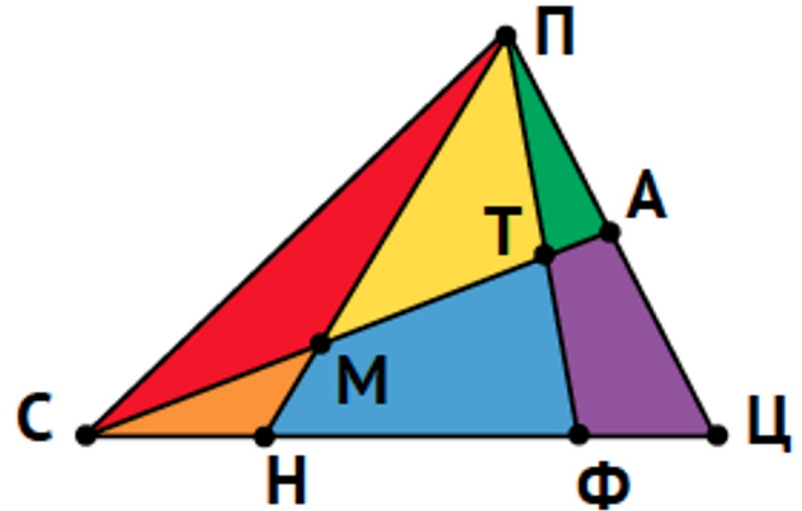
Из одной области: 4 треугольника (есть всего 6 областей).

Из двух областей: 6 треугольников (есть всего 7 возможных  
перемычек, то есть общих сторон двух областей).

Из трёх областей: 2 треугольника.

# Перечисляем треугольники

Перечислите  
все треугольники,  
изображённые  
на этом чертеже.



Из одной области: 4 треугольника (есть всего 6 областей).

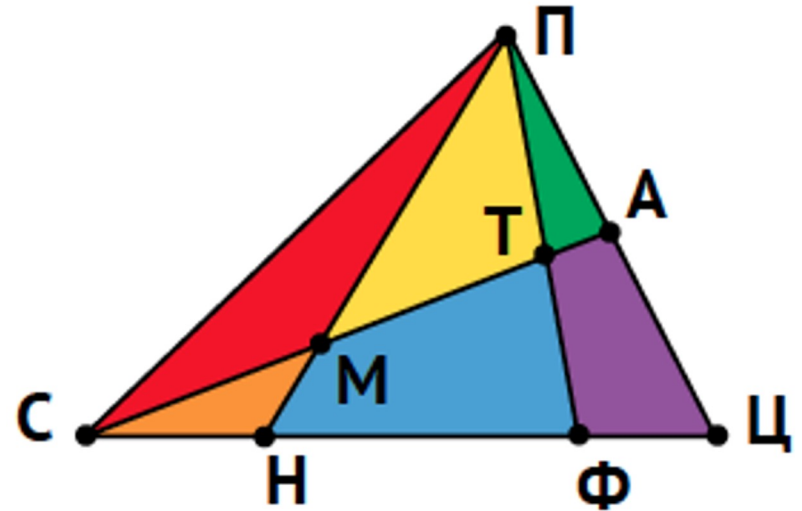
Из двух областей: 6 треугольников (есть всего 7 возможных  
перемычек, то есть общих сторон двух областей).

Из трёх областей: 2 треугольника.

Из четырёх областей: 2 треугольника.

# Перечисляем треугольники

Перечислите  
все треугольники,  
изображённые  
на этом чертеже.



Из одной области: 4 треугольника (есть всего 6 областей).

Из двух областей: 6 треугольников (есть всего 7 возможных  
перемычек, то есть общих сторон двух областей).

Из трёх областей: 2 треугольника.

Из четырёх областей: 2 треугольника.

Из шести областей: 1 треугольник.

# Дерево перебора

- В корне дерева – условие задачи.
- В развилках дерева – вопросы, позволяющие разбить все множество вариантов на классы.
- На ветках – ответы на эти вопросы.
- В листах дерева – искомые объекты (сегодня это будут цепочки).



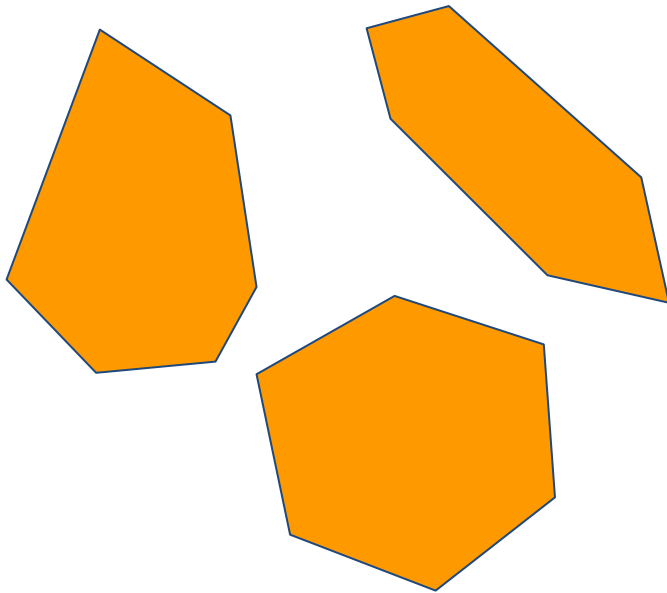


# Дерево перебора

- В **каждой** развилке стоит вопрос.  
(если ответы на уже заданные вопросы не определяют вариант однозначно, необходимо задать ещё один вопрос).
- Если на вопрос только один ответ, то из развилки растёт только одна ветка. Значит, мы уже пришли к варианту (листу дерева).
- Если мы видим, что какой-то ответ не даёт ни одного варианта, ставим **X**.

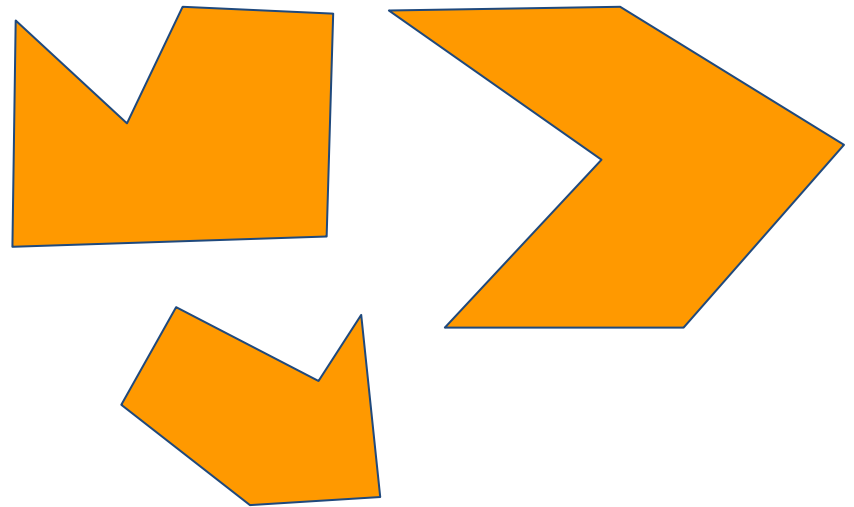
# Шестиугольники

Выпуклые



Нет углов больше 180

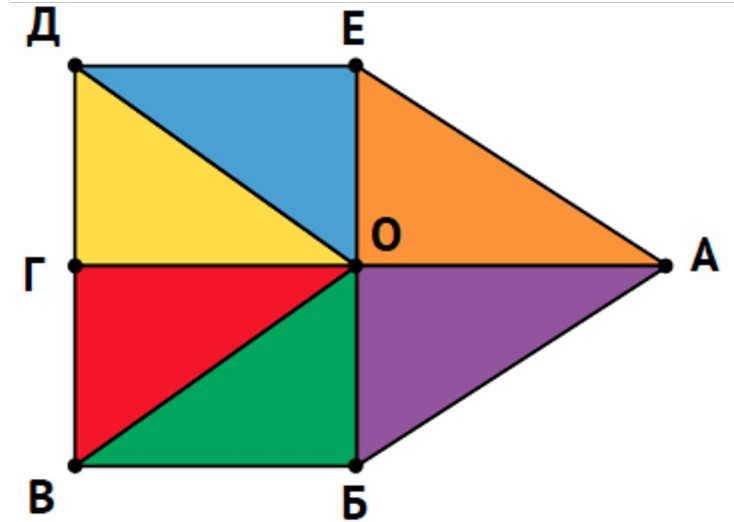
Невыпуклые



Есть углы больше 180

# Шестиугольники

Перечислите все шестиугольники, изображённые на этом чертеже.



Приведите пример шестиугольника.

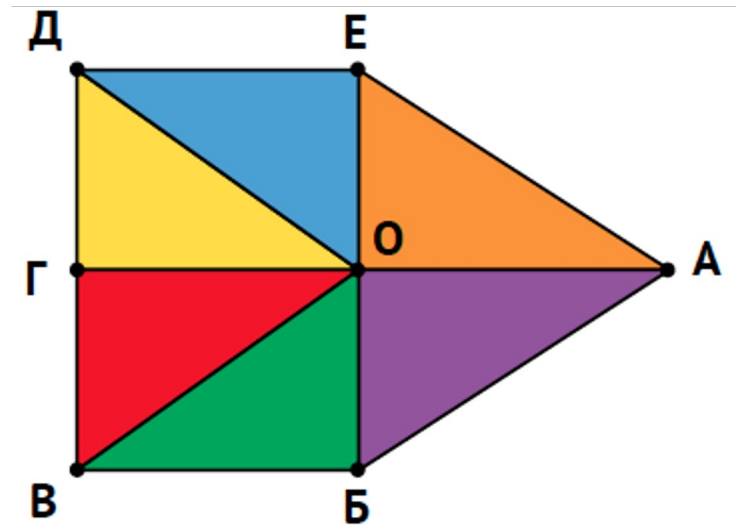
Может ли в шестиугольнике не быть вершины O?

Сколько областей может быть в шестиугольнике?

# Шестиугольники

Из трёх треугольников  
нельзя составить  
шестиугольник.

Нужно 4 или 5 областей.



Выбрасываем два треугольника. У них есть  
общая сторона:  $OB$ ,  $OG$ ,  $OD$ .

Или выбрасываем только один треугольник.

ФЕОАБВ

ВФЕАБО

ВДЕАОБ

ДВБАЕО

ΔВОБ

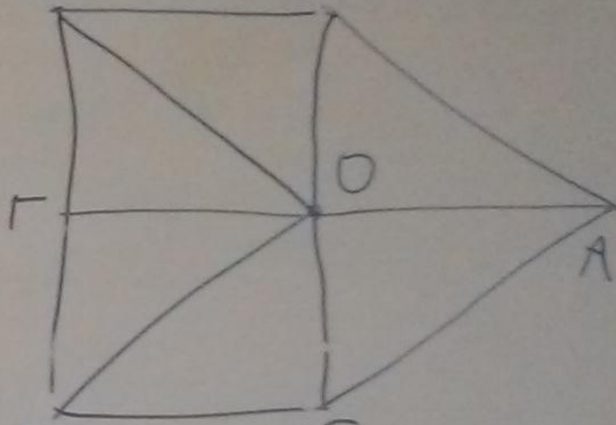
Х

ΔЕОА

ΔБОА

Д

Е



какой Δ выброшен?

5

сколько областей в 6-уг?

4

6

какая общая сторона выбрасывается?

ГО

ЕО

ДЕАБВО

ВО

БО

АО

Х

Х

ДО

Х

ГДЕАБО

ГВБАЕО

из трех Δ нельзя составить 6-угольник

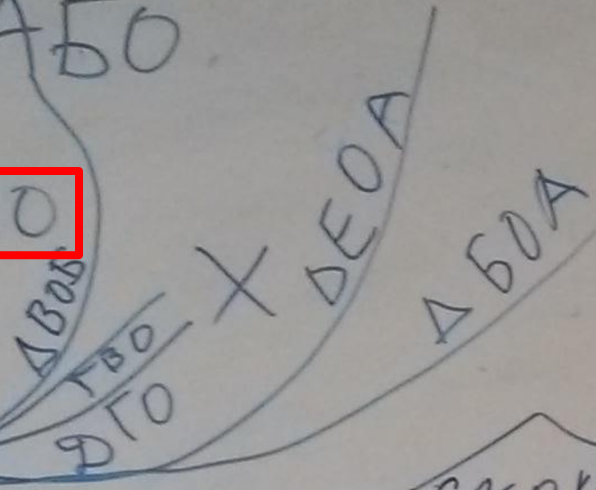
ФЕОАБВ

ВФЕАБО

ВДЕАОБ

ВВБАЕО

ГЕОБ  
ГВО  
ГТО



5

сколько областей в 6-угольнике

4

какая общая сторона выбрасывается

ГО

ГЕАБВО

ВО

ГДЕАБО

БО

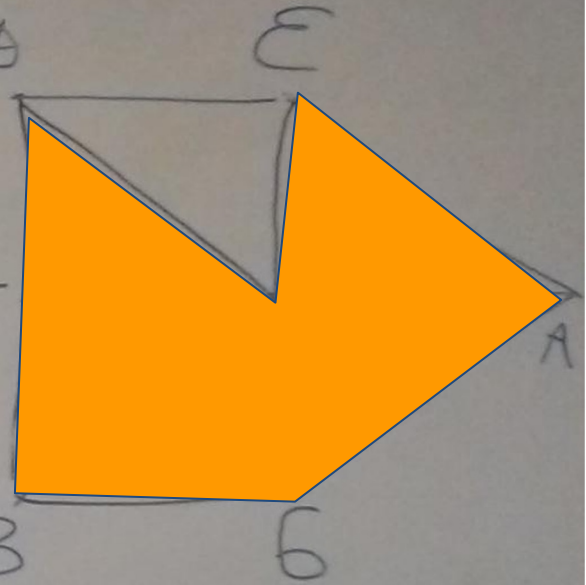
АО

Х

Х

ГВБАЕО

ГО



из трех Δ нельзя составить 6-угольник

**ВФЕАБО**

ФЕОАБВ

ВДЕАОВ

ДВБАЕО

ΔВОБ

ГВО  
ДГО

ΔЕОА

ΔБОУА

какой  
Δ выбран?

5

сколько  
областей  
в 6-уг?

4

какая  
общая сторона  
выбрасывается

ГО

ДЕАБВО

ВО

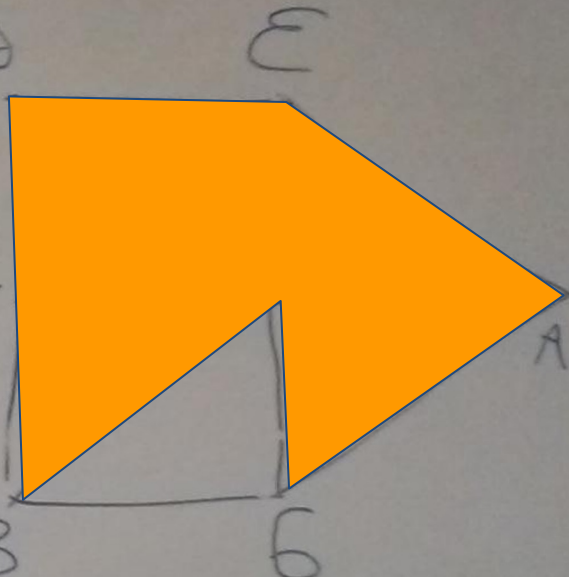
БО

АО

ГДЕАБО

ГО

ГВБАЕО



из трех Δ  
нельзя  
составить  
6-угольник

ФЕОАБВ

ВФЕАБО

ВДЕАОВ

ДВБАЕО

20  
30

ΔВОБ

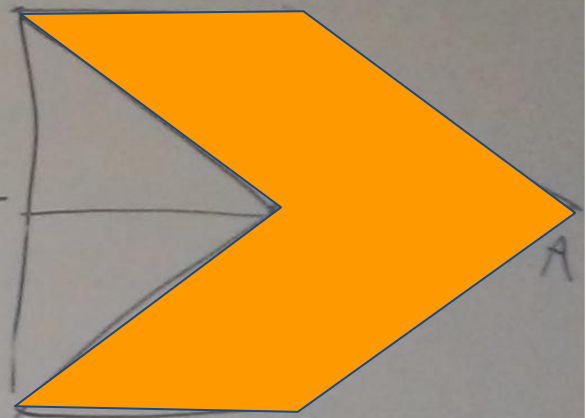
X

ΔЕОА

ΔБОУА

Ф

Е



какой Δ выброшен?

5

сколько областей в 6-уг?

4

6

какая общая сторона выбрасывается

ГО

ГО

из трех Δ нельзя составить 6-угольник

ДЕАБВО

БО

АО

ВО

X

X

ДО

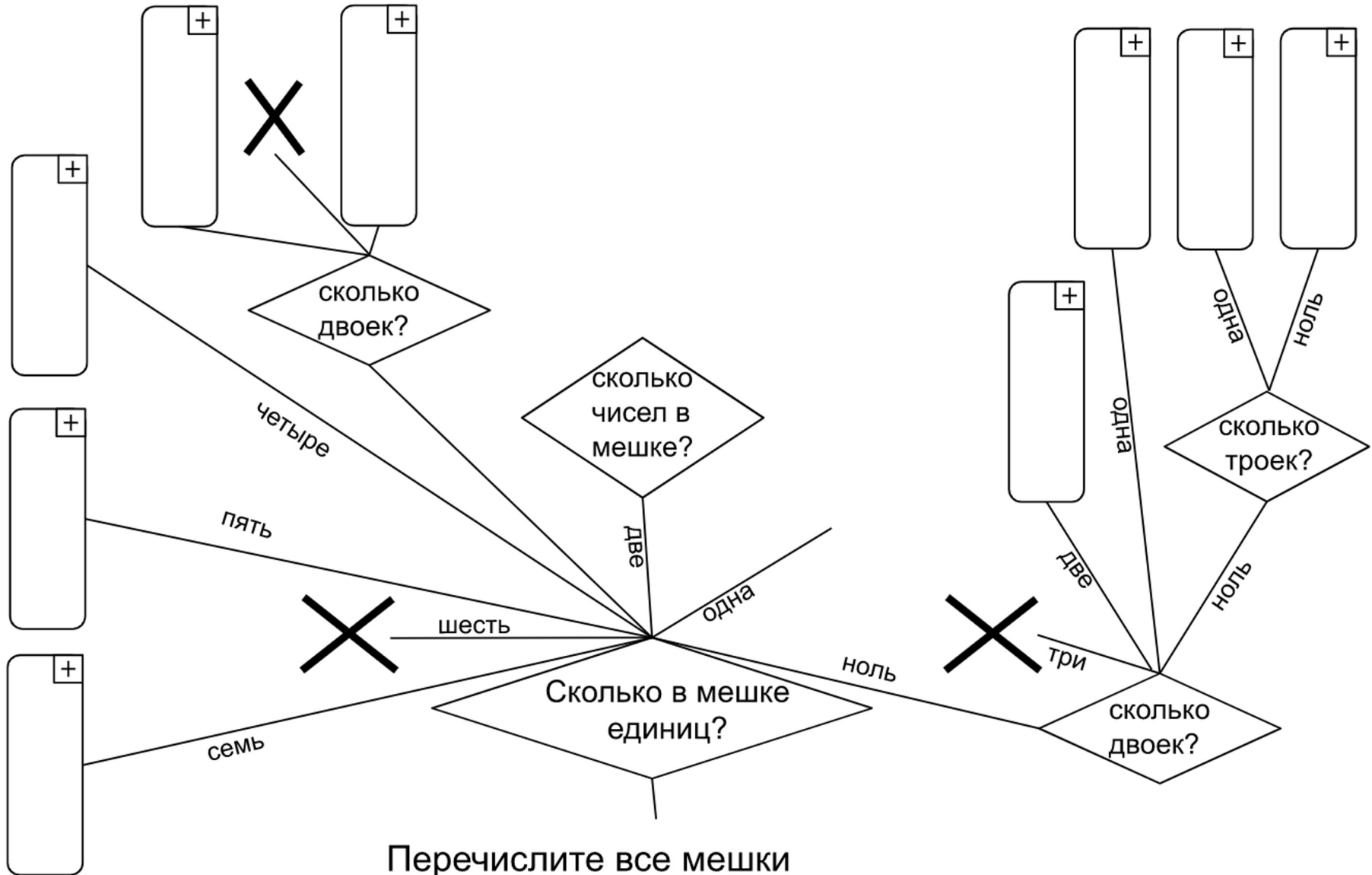
X

ГДЕАБВО

ГВБАЕО

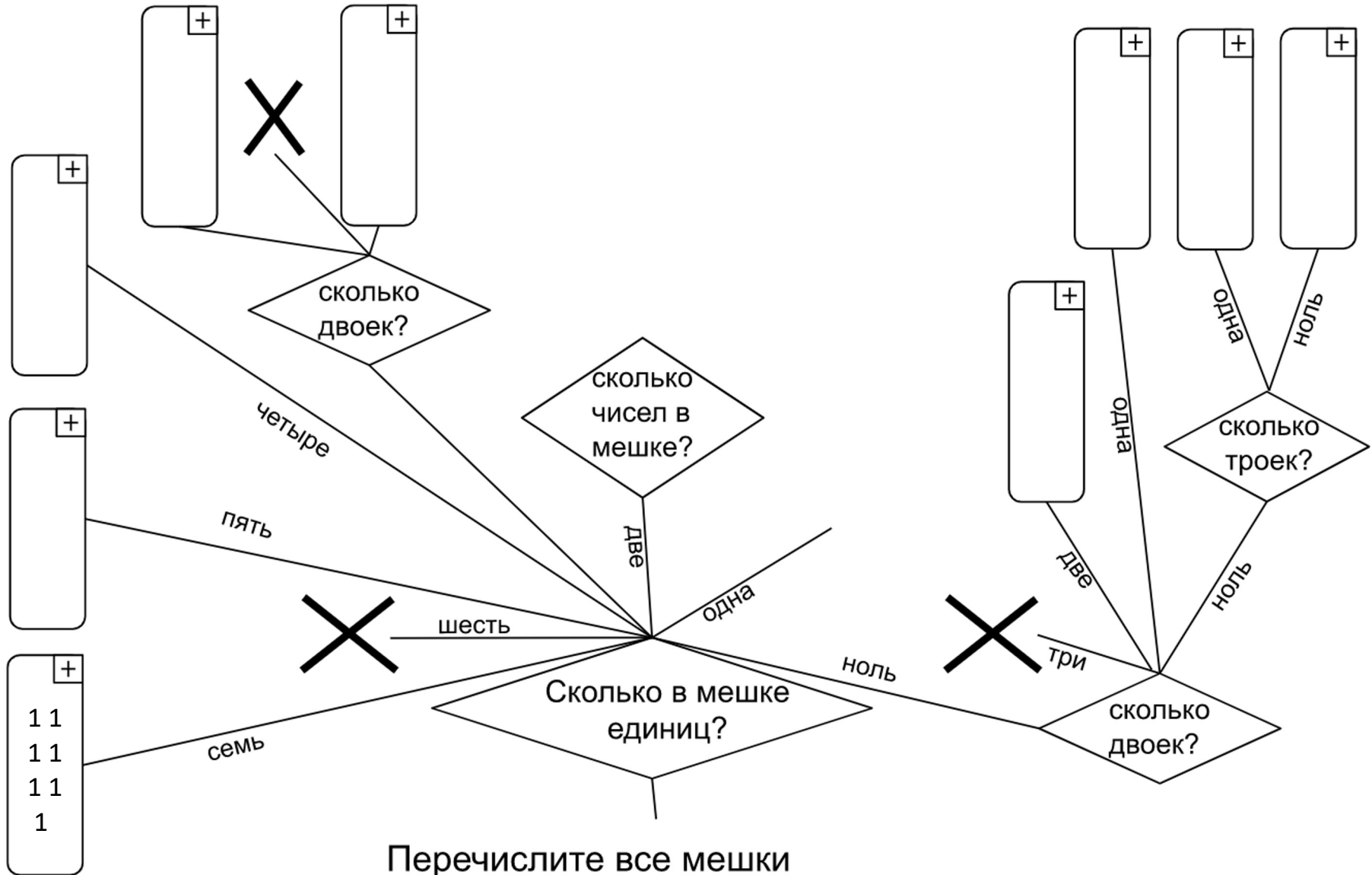


Дорисуйте дерево перебора.

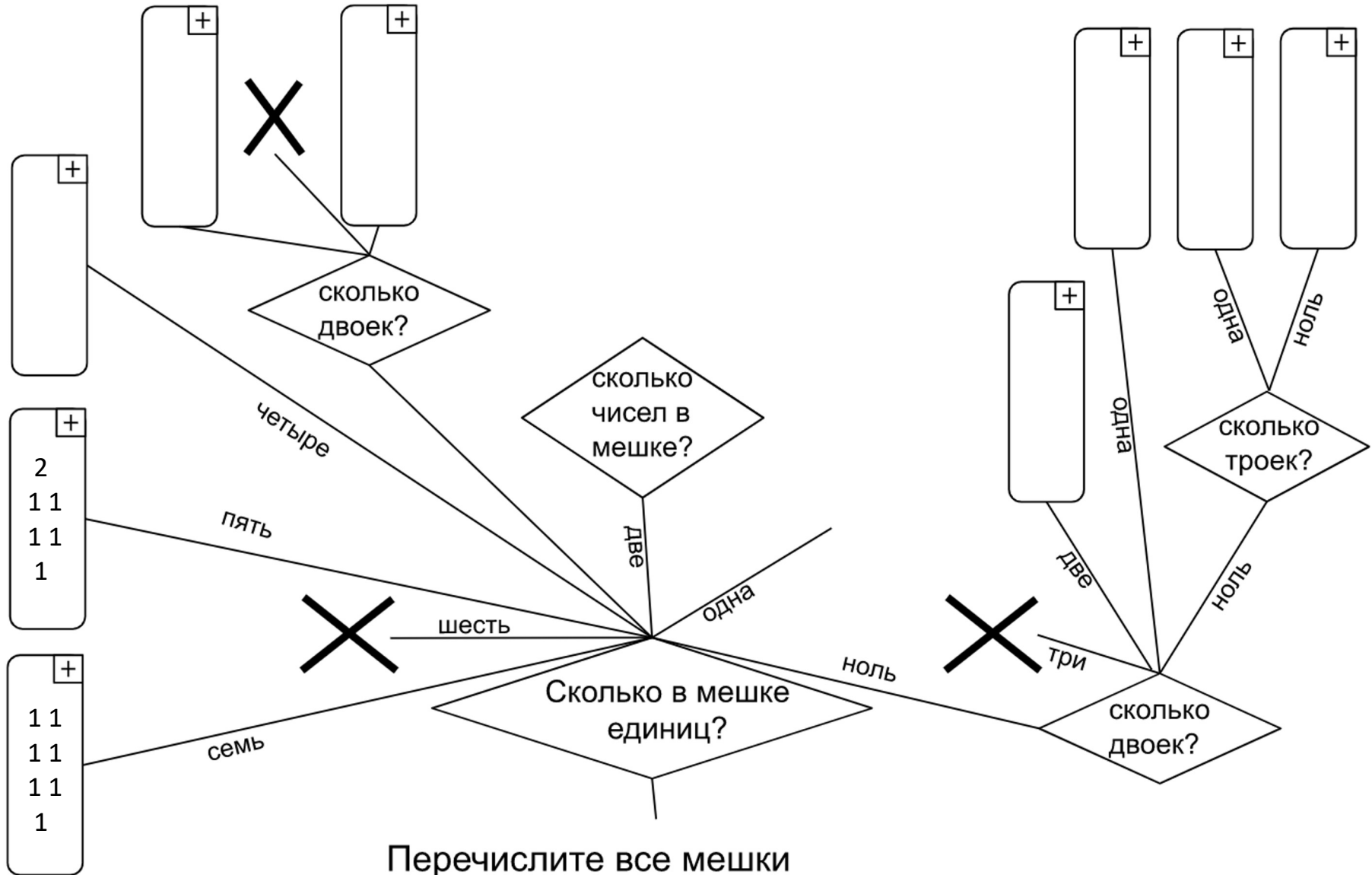


Перечислите все мешки натуральных чисел с суммой 7.

Дорисуйте дерево перебора.

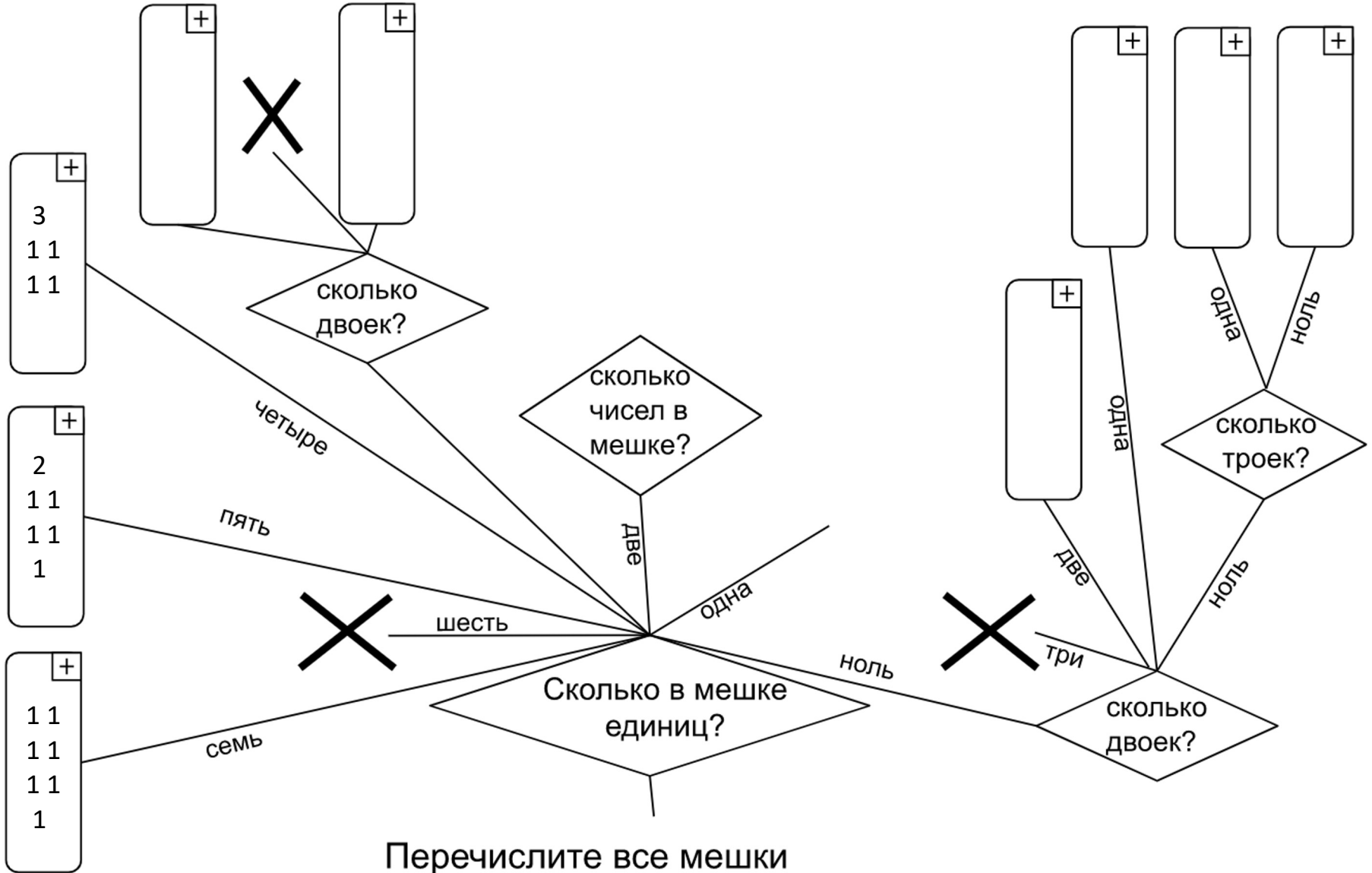


Дорисуйте дерево перебора.



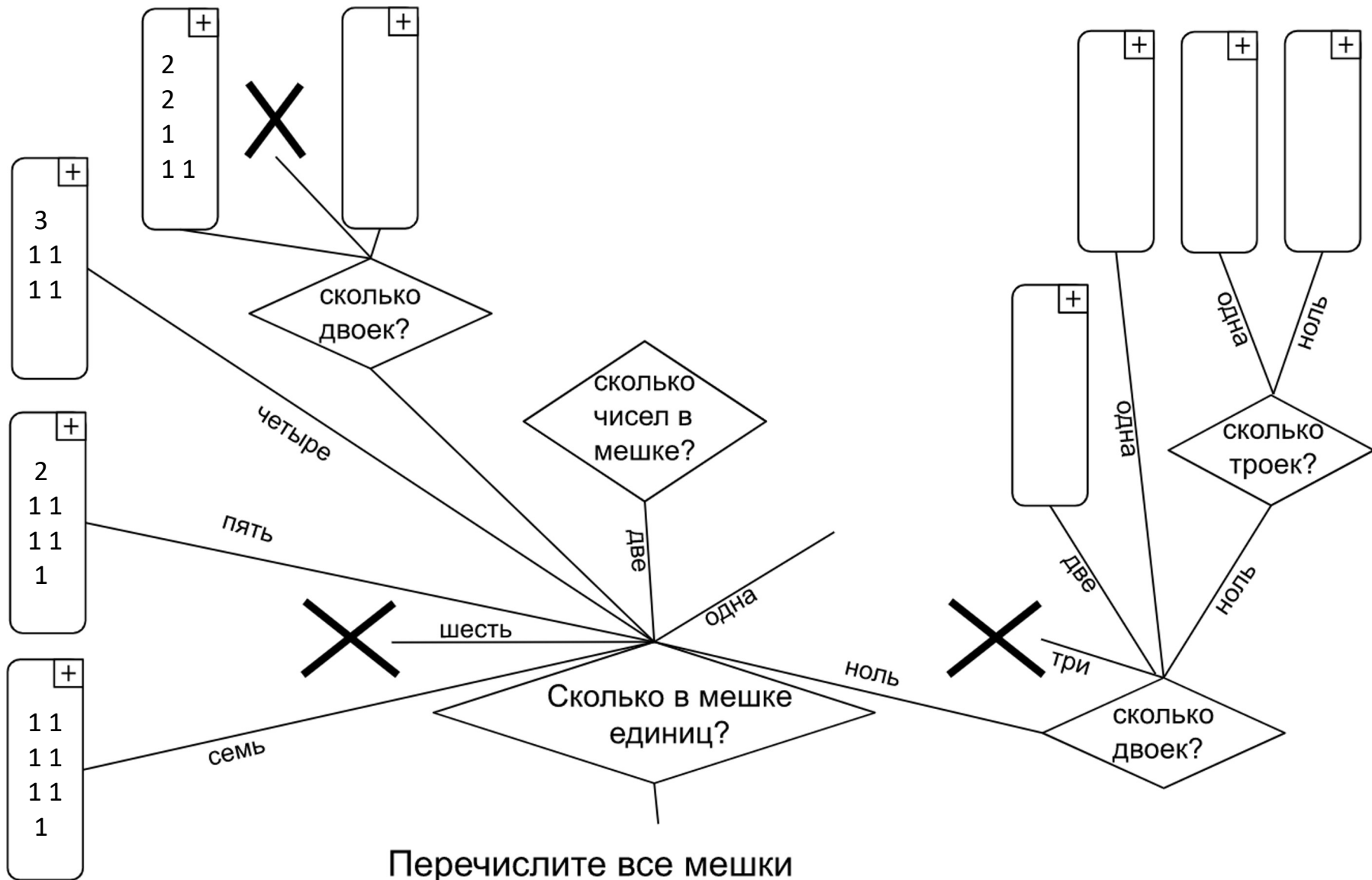
Перечислите все мешки натуральных чисел с суммой 7.

Дорисуйте дерево перебора.



Перечислите все мешки натуральных чисел с суммой 7.

Дорисуйте дерево перебора.



Перечислите все мешки натуральных чисел с суммой 7.

# Выводы

- Комбинаторика в начальной школе не может быть формульной
- Но перечисление объектов доступно детям
- Это дает возможность давать достаточно сложные задачи, не вводя больших чисел
- Это хорошая пропедевтика алгебры, геометрии и теории вероятностей
- Это язык, делающий более понятными многие олимпиадные задачи

# Выводы

Перечисление всех объектов с заданными свойствами - большая задача, которую удобно делить на маленькие подзадачи  
Это дает простор для групповой работы  
Задачи могут быть разной сложности,  
и это помогает ввести разноуровневое обучение в рамках единых учебных тем