

НЕБЕСА ПАДАЮТ [ВСЕ БЫСТРЕЕ] МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКОВ

Николай ВАВИЛОВ, Владимир ХАЛИН, Александр ЮРКОВ

Факультет математики и компьютерных наук и
Экономический факультет
Санкт-Петербургский государственный университет

09 марта 2023

Объединенный семинар

“Математика и информатика в средней и высшей школе”

1 СОСТОЯНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Текущее состояние математического образования отстает от современных потребностей **на сотни лет**, если не **тысячелетия**.

Возник *катастрофический* и постоянно расширяющийся начиная с XIX века отрыв практикующих математиков от других образованных слоев общества и от образования в целом:

- Школьное образование не отражает состояние математики XVI века.
- Уровня математики XVIII века достигают *единицы*.
- Классическая математика XIX века остается исключительным достоянием профессиональных математиков и наиболее продвинутых теоретических физиков.

В этом смысле ничего не изменилось за 60 лет после того как Гуго Штейнгауз произнес свою знаменитую диатрибу — а если изменилось, то В ХУДШУЮ СТОРОНУ!

“Toteż w niej bez porównania wyraźniej niż w innych dyscyplinach występuje rozciąganie się pochodzenia ludzkości. W tej chwili żyją równocześnie na ziemi ludzie, którzy matematycznie należą do epoki starszej od piramid egipskich, i ci są w znacznej większości; niewielki odsetek dotarł do średniowiecza, a do XVIII w. nie doszedł ani jeden człowiek na tysiąc.” =

“Также в ней несравненно отчетливее, чем в других науках, проявляется то, как растянут прогресс человечества. Сегодня одновременно с нами на земле живут люди, с точки зрения понимания математики принадлежащие эпохе более древней, чем египетские пирамиды, и их значительное большинство; небольшой процент добрался до средних веков, до XVIII века не дошел и один из тысячи”.

Ситуация постоянно ухудшается, начиная с 1950-х годов. В 1980-м году Уилльям Тёрстон *начинает* свою статью констатацией:

MATHEMATICS EDUCATION IS IN AN UNACCEPTABLE STATE.

В настоящий момент ситуация **усугубляется** все более широким распространением компьютеров, которые в состоянии решать большую часть вычислительных задач, где традиционно применяется математика.

Это создало у многих пользователей иллюзию, что учить математике вообще не нужно — мы слышали такую точку зрения от многих инженеров и представителей других предметных областей.

Это составляет немедленную и непосредственную угрозу нашей профессии — THE SKIES ARE FALLING!

2 МАТЕМАТИКА В ЧЕЛОВЕЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ

Наша точка зрения прямо противоположна:

- В интеллектуальном и эстетическом планах МАТЕМАТИКА, вместе с другими высшими творческими искусствами, ЯВЛЯЕТСЯ ВЫСШИМ ПРОЯВЛЕНИЕМ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО ДУХА И КУЛЬТУРЫ, ценным независимо от каких-либо приложений.

- В практическом и техническом плане МЫ ЖИВЕМ В МИРЕ, СОЗДАННОМ МАТЕМАТИКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ЕСТЕСТВОЗНАНИЕМ.

- Освальд Шпенглер утверждал, и мы с ним в этом согласны, что УРОВЕНЬ ЦИВИЛИЗАЦИИ В ОГРОМНОЙ СТЕПЕНИ ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ УРОВНЕМ ЕЕ МАТЕМАТИКИ.

К сожалению, эти очевидные истины не признаются современными торговцами дискурсом = discourse-mongers — философами, политиками, журналистами, эдукационистами и т.д.

Большинство вещей вокруг нас, включая нас самих, не могли бы существовать в нынешнем виде без математики и основанной на ней науки.

- Это относится просто к численности человеческой популяции, которая НА НЕСКОЛЬКО ПОРЯДКОВ превосходит численность любых других *несинантропных* животных сопоставимой массы. Эту численность НЕВОЗМОЖНО ПОДДЕРЖИВАТЬ БЕЗ НАУКИ.

- Точно также, без большого числа людей глубоко понимающих математику и науку НЕВОЗМОЖНО ПОДДЕРЖИВАТЬ — не то, что развивать! — БОЛЬШУЮ ЧАСТЬ СОВРЕМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ.

- В различные периоды своей истории математика была *чрезвычайно* успешна в естествознании, первоначально в астрономии и физике, потом в других науках и инженерной практике.

- Мы убеждены, что сегодня математика могла бы сыграть такую же роль в биологии и науках о человеке, что сегодня у нас есть все необходимые для этого инструменты.

Для этого нужно *ровно одно*, чтобы математику ЗНАЛИ И ПОНИМАЛИ ТЕ, КОМУ ПРЕДСТОИТ ЕЕ ПРИМЕНЯТЬ.

Нужно снова поместить центральные современные области математики (= core mathematics) в фокус образования на всех уровнях.

Для этого мы должны вернуть широким народным массам понимание того, что реальность говорит с нами языком математики, что МАТЕМАТИКА — ЭТО ЕДИНСТВЕННЫЙ И НЕПРЕЛОЖНЫЙ ПОСРЕДНИК МЕЖДУ ДУХОМ И МАТЕРИЕЙ.

3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

Это объясняет совершенно особую роль математического образования в функционировании общества.

Пьер Кахане: “IN NO OTHER SCIENCE HAS TEACHING AND LEARNING SUCH SOCIAL IMPORTANCE”.

Три совершенно разных уровня математического образования:

- Доуниверситетский уровень;
- Математика для нематематиков;
- Математика для математиков.

Владимир Абрамович Рохлин:

“ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ МАТЕМАТИКОВ — ДЕЛО БЕСКОНЕЧНО БОЛЕЕ ЛЕГКОЕ, ЧЕМ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ НЕМАТЕМАТИКОВ.”

Что является целью массового математического образования?

Мы должны в каждый момент оперировать на трех совершенно различных уровнях:

- Математика как часть ОБЩЕЙ КУЛЬТУРЫ;
- Математика КАК ТАКОВАЯ;
- Математика ДЛЯ СПЕЦИФИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ.'

Основная ошибка всего математического образования состоит в том, что оно фокусируется на и рекламирует только *третий* их этих аспектов,

- наименее важный;
- наименее интересный;
- в большинстве случаев фиктивный.

● Самый важный аспект преподавания математики на элементарном уровне — выработка **интеллектуальной честности**.

Способности отличать:

- то, что ты понимаешь, от того, чего ты не понимаешь;
- то, что имеет точный смысл, от того, что не имеет;
- то, что сказано, от того, что имеется в виду;
- возможное от невозможного;
- истинное от ложного;
- доказанное от предполагаемого.

и т.д.

● Второй столь же важный аспект — **физкультура мозга**, подготовка к умению решать *любые* **трудные задачи**.

Математика тренирует, *в частности*:

- внутреннее зрение,
- эстетический вкус,
- память,
- выдержку,
- умение сфокусироваться на задаче,
- умение наблюдать, обобщать и специализировать,
- умение извлекать следствия,
- умение прослеживать и строить длинные цепочки рассуждений.

На более высоких уровнях изучения математики все более важным становится другой аспект.

- Развитие **математического стиля мышления**:

- привычка начинать с первых принципов,
 - привычка начинать с простейшего случая,
 - навык выражать вещи на другом языке,
 - использование аналогий и метафор,
 - привычка к символьным вычислениям,
 - умение оперировать большими цепочками рассуждений как единым целым,
- и т.д.

Как только мы пытаемся продавать *специфические приложения*, мы проигрываем.

Это и происходит сейчас, с **ужасающими** эффектами.

4 УТИЛИТАРНАЯ ПЕРСПЕКТИВА

УТИЛИТАРНЫЙ ПРИНЦИП РАЗРУШАЕТ ОБРАЗОВАНИЕ.

Лучшее возможное образование — БЕСПОЛЕЗНОЕ.

Это, разумеется, относится и к математическому образованию.

Об этом говорил Чжуан-цзы 24 века назад:

“ВСЕ ЗНАЮТ ПОЛЬЗУ ПОЛЕЗНОГО, НО НИКТО НЕ ЗНАЕТ ПОЛЬЗУ БЕСПОЛЕЗНОГО.”

Часто между первоначальной идеей и последующим открытием, а потом между открытием и его техническим воплощением проходят десятилетия или столетия.

Было бы невозможно *обнаружить* лазеры в природе, их нужно было *изобрести*.

Это было бы невозможно без **квантовой механики**.

В свою очередь, квантовая механика не могла возникнуть без предшествующего развития физики и математики, включая, *в частности*, комплексные числа, дифференциальные уравнения и матрицы.

Но итальянские алгебраисты XVI века, которые ввели **комплексные числа**, сделали это из внутренних побуждений: спорт, эстетика и т.д.

Они не имели в виду *никаких приложений*, не только квантовой механики, но даже переменный ток и радио.

Сторонники “полезного образования” пытаются продать одну идею, идею “полезности”.

5 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ: СОЦИОЛОГИЯ

Школьный учебник Дмитрия Александровича Граве “Алгебра” 1905 года *начинается* с ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ И КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ.

И заканчивается упоминанием теории Галуа — с которой начинается его учебник алгебры для университетов.

Александр Боровик обсуждает трихотомию:

- учить математике всех;
- учить математике избранных;
- не учить математике никого.

В СССР и России все это несколько смягчается наличием физико-математических школ, которые являются с огромным отрывом ЛУЧШЕЙ, НАИБОЛЕЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ И НАИБОЛЕЕ ЭФФЕКТИВНОЙ частью всего российского образования.

6 ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА: СТИЛЬ И СОДЕРЖАНИЕ

- Все сегодняшние школьные курсы заточены на отработку [большой частью бесполезных] вычислительных навыков и механическое применение небольшого числа неэффективных и устаревших алгоритмов.

В XVII, XVIII и даже отчасти в XIX веке это могло иметь смысл. Сейчас — никакого!

- Например, доминирование **тригонометрии** в старших классах объясняется только нуждами баллистики и навигации в эпоху массовых призывных армий.

- Все это привело к созданию отдельной “элементарной математики”, отдельной области знания, которая никак не связана с остальной математикой (или с чем-либо еще).

Юрий Неретин следующим образом описывает бизнес план:

- Использовать математику как барьер и фильтр, создать ВСТУПИТЕЛЬНУЮ МАТЕМАТИКУ.
- Создать рынок частных и полу-частных образовательных услуг — подготовительные курсы, репетиторы и тому подобное, и соответствующую литературу, онлайн курсы и т.д.

Неретин заключает:

“УПОМЯНУТАЯ НАУКА ВЫЗЫВАЕТ У НОРМАЛЬНОГО МОЛОДОГО ЧЕЛОВЕКА ЛИШЬ СКУКУ И ОТВРАЩЕНИЕ, И ЧТО НЕСРАВНЕННО ХУЖЕ — ОТУПЕНИЕ. В ОСОБО ТЯЖЕЛЫХ СЛУЧАЯХ (И ТАКОЕ СЛУЧАЕТСЯ) ЧЕЛОВЕК ВОСПРИНИМАЕТ ВСЕ ЭТО СЕРЬЕЗНО.”

7 МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКОВ

Обучение математике нематематиков на университетском уровне столь же удручающе.

Во многих административных аспектах оно лучше школьного. Но в том, что касается содержания и доминирования абсолютно устаревшей традиции, еще менее осмысленно, чем школьное математическое образование

Исторически, курсы “высшей математики” представляют собой просто ухудшенные курсы начала XX века.

Вот, что говорит Рохлин в 1981 году:

“...испорченные курсы, по которым готовят математиков. Всё тот же порядок изложения, всё те же пределы, всё та же производная, тот же интеграл, те же кривые второго порядка и так далее и тому подобное. Изложение ведется в том же порядке, но менее понятно.”

Чему нужно учить нематематиков?

Наш *короткий* ответ МЫ НЕ ЗНАЕМ — и никто не знает!

Вот обычные ответы, традиционный, утилитарный и радикальный:

- ТОМУ ЖЕ, ЧЕМУ ВСЕГДА — ряды, пределы, собственные числа, ...
- Тому, что *сегодня* используется в предметной области — между “тому же, чему всегда” и “ничему”.
- НИЧЕМУ! Это не шутка! Эта точка зрения имеет все больше сторонников.

Наша *попытка ответа* такая, раз все равно никто не знает, то

- МАТЕМАТИКЕ МАТЕМАТИКОВ.

Учить математике так, как мы, математики, ее понимаем — т.е., в первую очередь, ПОНИМАНИЮ.

Учить тому, что мы, математики, считаем важным:

- использованию языка,
- общим понятиям, которые позволят воспринять другие понятия,
- математическому мышлению,
- основной технике,
- наиболее продуктивным способам рассуждений
- классическим конструкциям и примерам,

и т.д.

8 КУРС “МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕР”

Описание в наших текстах:

1) Н. А. Вавилов, В. Г. Халин, А. В. Юрков, *Mathematica для нематематика*. МЦНМО, 2021.

2) Vladimir Khalin, Nikolai Vavilov and Alexander Yurkov, *Mathematics for non-mathematicians: an idea and the project*. PCA-2022, St Petersburg, Euler Int. Math. Inst., 121–149.

2) Vladimir Khalin, Nikolai Vavilov and Alexander Yurkov, *The skies are falling: mathematics for non-mathematicians*. Submitted.

Кроме того, есть дальнейшие учебные тексты и **сборники задач**.

9 МАСШТАБИРУЕТСЯ ЛИ НАШ ОПЫТ?

С нашей точки зрения, и с точки зрения студентов, этот опыт был ЧРЕЗВЫЧАЙНО УСПЕШНЫМ.

В любом случае, гораздо веселее, чем преподавать или слушать обычные курсы!

Студенты были активно вовлечены и выучили

- больше математики,
- более разнообразной математики,
- более интересной математики,
- более полезной математики,

чем при традиционных подходах.

○ Студенты перестали бояться математику, увидели, что MATHEMATICS IS FUN!

Можно ли повторить наш опыт в другом университете?

С другой стороны, мы понимаем, что были в привилегированном положении во многих аспектах.

- СПбГУ и МГУ единственные университеты в России, имеющие полную академическую автономию.
- Наш проект имел полную поддержку, административную и финансовую, со стороны руководства факультета.
- У нас было *два* полностью оборудованных класса с досками и 25+1 компьютерами, объединенными в локальную сеть с лицензионными копиями *Mathematica*, *Maple* и т.д. + дружественная техническая поддержка.
- Программы “Математические методы в экономике” и “Прикладная информатика в экономике” обе весьма конкурентивны и набирали хороших студентов, многие из которых уже имели опыт работы с компьютером и программирования на языках низкого уровня.

- Многие из этих студентов пришли из хороших Петербургских школ, где их неплохо учили математике и, в любом случае, они параллельно изучали традиционные курсы анализа и линейной алгебры.

- Практически у всех студентов были свои компьютеры с *какими-то* математическими программами, и все они имели полный доступ к факультетским компьютерам с установленными копиями Mathematica, Maple, etc., в том числе во внеаудиторное время.

- Все они могли пользоваться учебной и технической литературой на английском языке.

Ясно, что любое из этих условий может нарушаться даже в очень хороших университетах, и ни одно из них не выполняется на более низких уровнях образования.

Для подлинного внедрения в массовое образование необходимо создание аналога *Mathematica*, *Maple* или *Axiom* НА РУССКОМ ЯЗЫКЕ, который можно было бы поставить на каждый компьютер в каждом классе.

СПАСИБО!