ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО КУРСУ “МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕР”

Николай Вавилов, Владимир Халин

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Все знание находится повсюду.

Идрис Шах, *Знание как знать*

I believe that mathematical reality lies outside us, and that our function is to discover or observe it, and that the theorems which we prove, and which we describe grandiloquently as our ’creations’ are simply our notes of our observations.

Godfrey Harold Hardy

Mathematics is an experimental science, and definitions do not come first, but later on.

Oliver Heavyside

In theory there is no difference between theory and practice. In practice there is.

Yogi Berra

Q: How many mathematicians does it take to screw in a light bulb?
A: None. It’s left to the reader as an exercise.

But those who do not care about fanciful things have no reason to read about Ireland.

Lord Dunsany, *My Ireland*

“Dwarf-doors are not made to be seen when shut,” said Gimli. “They are invisible, and their own masters cannot find them or open them, if their secret is forgotten.”

J.R.R Tolkien, *The Lord of the Rings*

“Have you guessed the riddle yet?” the Hatter said, turning to Alice again.
“No, I give it up,” Alice replied. “What’s the answer?”
“I haven’t the slightest idea,” said the Hatter.

Lewis Carroll, *Alice’s adventures in Wonderland*

Think, speak, cast, write, sing, number.

William Shakespeare, *Antony and Cleopatra*

По прихоти своей скитаться здесь и там,
Дивясь божественным природы красотам,
И пред созданьями искусств и вдохновенья
Трепеща радостно в восторгах умиленья.
— Вот счастье! вот права ...

Александр Пушкин, *Из Пиндемонти*

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Большинству из нас трудно даже вообразить, что в действительности означает число 10^{21}.

Кнут Шмидт-Нилсен[1]

Almost all natural numbers are very, very, very large.

R.Steinbach[2]

[1]К.Шмидт-Ниелсен, Размеры животных: почему они так важны? — Мир, М., 1987, 259с.

[2]R.Steinbach, Field guide to simple graphs. — Design Lab., Albuquerque, 1990.

Предисловие

Коренное различие между Шенноновской теорией информации и современной теорией вычислительной сложности состоит в том, что при использовании теории Шеннона криптограф уповает на то, что криптоаналитик не будет располагать достаточной *информацией* для того, чтобы дешифровать криптограмму, в то время как, основываясь на теории вычислительной сложности, криптограф рассчитывает только на то, что у криптоаналитика не хватит *времени*, чтобы это сделать.

Жиль Брассар, *Современная криптология*

Печень полностью выводит алкоголь из организма за одни сутки. Поэтому пить приходится каждый день.

Пан Злопыхальский

I haven’t forgotten anything I didn’t want to forget.

Paulo Ribenboim, *Galimatias Arithmeticae*

Настоящий задачник, продолжающий выпущенные авторами в 2006 году сборники задач [VH3], [VH4], содержит несколько сотен дополнительных задач по курсу “Математика и компьютер”. В него включены задачи по дискретной математике (главным образом, работа со списками и системы множеств), арифметике, теории чисел и комбинаторике.

Эти задачи разбиваются на два типа.

• С одной стороны, это задачи, охватывающие некоторые важнейшие темы (связанные списки, сортировка кучками, системы счисления, числа Люка и т.д.), не изложенные в основных выпусках.

• С другой стороны, это элементарные задачи тех же типов, что в основных выпусках, но, как правило, приводимые без ответов и, по крайней мере, без детальных решений.

Как нам кажется, это увеличит ценность настоящего пособия как источника задач, которые могут быть предложены на зачетах и экзаменах. Дело в том, что многие из задач слишком сложны, чтобы предлагать их в классе для решения в реальном времени. С другой стороны, за год студенты [неизвестным науке способом] успевают полностью сообщить следующим поколениям решения всех известных им задач, поэтому предлагать прошлогодние задачи в качестве домашних заданий совершенно бесполезно. Поэтому придумывать (или изыскивать!) новые задачи для зачетов нам приходится каждый год. Здесь как раз и собраны некоторые из таких новых задач, уже известные нашим студентам,

При составлении настоящего пособия мы пользовались книгами, перечисленными в библиографии к выпускам 1 и 2, а также перечисленными ниже дополнительными источниками.

Рекомендованная литература

[VH1] Н.А.Вавилов, В.Г.Халин, `Mathematica` *5.* для нематематика. Вып. 1. Первое знакомство*, ОЦЭиМ, СПб, 2005, pp. 1–180.

[VH2] Н.А.Вавилов, В.Г.Халин, `Mathematica` *5.* для нематематика. Вып. 2. Основы синтаксиса*, ОЦЭиМ, СПб, 2005, pp. 1–136.

[VH3] Н.А.Вавилов, В.Г.Халин, *Задачи по курсу “Математика и Компьютер”. Вып. 1. Арифметика и теория чисел*, ОЦЭиМ, СПб, 2006, pp. 1–178.

[VH4] Н.А.Вавилов, В.Г.Халин, *Задачи по курсу “Математика и Компьютер”. Вып. 2. Комбинаторика и дискретная математика*, ОЦЭиМ, СПб, 2006, pp. 1–207.

[VH5] Н.А.Вавилов, В.Г.Халин, *Задачи по курсу “Математика и Компьютер”. Вып. 3. Алгебра многочленов*, ОЦЭиМ, СПб, 2008, pp. 1–202.

[GKP] Р.Грехем, Д.Кнут, О.Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998, pp. 1–703.

[Iv] О.А.Иванов, *Избранные главы элементарной математики*, Изд-во СПбГУ, СПб, 1995, pp. 1–223.

[Li] В.Липский, *Комбинаторика для программистов*, Мир, М, 1988, pp. 1–213.

[No] Ф.А.Новиков, *Дискретная математика для программистов*, Изд-во Питер, СПб, 2001, pp. 1–301.

[Li] А.Шень, *Программирование: теоремы и задачи*, МЦНМО, М, 2004, pp. 1–294.

[Ma] R.E.Maeder, *Programming in* `Mathematica`*, 3rd ed.*, Addison-Wesley, 1996.

[Wo] S.Wagon, `Mathematica` *in Action*, Springer-Verlag, 1999.

[Wo] S.Wolfram, *The* `Mathematica` *book. 5th ed.*, Wolfram Media, 2003, pp. 1–1464.

Дополнительная использованная литература

[АЦ] М. Айгнер, Г. Циглер, *Доказательства из Книги*, Мир, М., 2006.

[Ba] E. J. Barbeau, *Pell's equation*, Springer-Verlag, Berlin et al., 2003.

[Be] P. Beckmann, *A history of* π, St. Martin's Press, 1971.

[Bl] D. Blatner, *The Joy of Pi*, Walker, 1997.

[BB] J. M. Borwein, P. B. Borwein, *Pi and the AGM: a study in analytic number theory and computational complexity*, Wiley, 1987.

[Ch] L. Childs, *A concrete introduction to higher algebra*, Springer-Verlag, Berlin et al., 1984.

[Cr] R. E. Crandall, *Topics in Advanced Scientific Computation*, TELOS/Springer-Verlag, Santa Clara:, 1996.

[EL] P. Eymard, J.-P.Lafon, *Autour du nombre* π, Hermann, Paris, 1999.

[Fi] S. R. Finch, *Mathematical constants*, C.U.P., Cambridge, 2003, 602p.

[Ho] V. E. Hoggatt, *The Fibonacci and Lucas numbers*, Houghton Mifflin, Boston, 1969.

[Ma] E. Maor, *e, the story of a number*, Princeton Univ. Press, 1994.

[ME] M. R. Murty, J. Esmonde, *Problems in algebraic number theory*, Springer-Verlag, Berlin et al., 2000.

[Na] M. B. Nathanson, *Elementary methods in number theory*, Springer-Verlag, Berlin et al., 2000.

[Ri] P. Ribenboim, *My numbers, my friends: popular lectures in number theory*, Springer-Verlag, Berlin et al., 2000.

[Va] S. Vajda, *Fibonacci and Lucas numbers, and the Golden section: theory and applications*, Halsted Press, 1989.

[WGK] P. Wellin, R. Gaylord, S. Kamin, *Introduction to Programming with* `Mathematica`*, 3rd Edition,*, Cambridge University Press, 2004.

[Wi] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1994.

Глава 1. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О СПИСКАХ

> Things must be learned only to be unlearned again or, more likely, to be corrected.
>
> Richard Feynman, *Lectures on physics*

Кроме нескольких собранных в первом параграфе простых задач, в настоящей главе две основные темы. С одной стороны, это некоторые важные алгоритмы и программистские трюки, позволяющие писать программы, значительно более эффективные для списков промежуточной длины (порядка десятков или сотен тысяч членов), чем то, что мы делали до сих пор. Второй темой этой главы являются некоторые комбинаторные понятия и факты, связанные с разбиениями и покрытиями множеств.

§ 1. Дополнительные задачи о списках

Максимальный элемент начального отрезка списка называется **текущим максимумом**.

1.1. Напишите функцию, которая возвращает по списку список всех его *текущих* максимумов в порядке появления.

Решение. Проще всего при помощи `FoldList`:

```
currentmaxima[x_]:=Rest[FoldList[Max,0,x]]
```

1.2. Напишите функцию, которая возвращает по списку список *различных* текущих максимумов.

Решение. Нужно лишь применить объединение к функции, построенной в предыдущей задаче:

```
distinctmaxima[x_]:=Union[Rest[FoldList[Max,0,x]]]
```

Движущимся средним = `moving average` ранга m называется среднее соседних m элементов.

1.3. Задайте функцию, которая сопоставляет списку список его движущихся средних ранга m.

Решение. Вот элегантное решение из `Programming Primer`. Нужно сложить исходный список с тем же списком, повернутым на

```
MovingAverage[x_,m_]:=Drop[Apply[Plus,
                         NestList[RotateRight,x,m-1]],m-1]/m
```

1.4. Задайте функцию, формирующую по списку список троек его последовательных элементов, второй элемент которых больше, чем m.

Решение. Можно использовать `Cases`:

```
trip[x_,m_]:=Cases[Partition[x,3,1],{x_,y_,z_}/;y>m]
```

В выпуске 2 мы определяли декартово произведение множеств при помощи `Outer` и `Distribute`.

1.5. Предложите конструкцию декартова произведения, использующую `Thread` вместо `Outer`.

Решение. Проще всего так

```
cart[x_,y_]:=Map[Thread[{#,y}]&,x]
```

В выпуске 2 мы обычно превращали список в набор применяя к нему команду `Sort`.

1.6. Задайте набор, представляемый данным списком, не используя команду `Sort`

Решение. Если можно использовать команды `Count` и `Union`, то, естественно, так:

```
multi[x_]:=Map[{#,Count[x,#]}&,Union[x]]
```

хотя это, естественно, работает медленнее, чем внутренняя команда `Sort`.

1.7. Задайте команду `UnsortedMultiset`, которая возвращает список пар, состоящих из различных элементов исходного списка в порядке их появления, вместе с их кратностями.

Решение. Определим вначале функцию, которая для списка x пар вида `{z,m}`, увеличивает кратность на 1, если y встречается как первая компонента какой-то пары из списка x, либо добавляет к этому списку пару `{y,1}`:

```
funny[x_,y_]:=Block[{pos=Flatten[Position[x[[All,1]],y]]},
                    If[pos!={},
       x+Normal[SparseArray[{First[pos],2}->1,{Length[x],2}]],
                                          Append[x,{y,1}]]]
```

Теперь остается только переработать исходный список в список пар по одному скармливая его элементы в функцию `funny`:

```
UnsortedMultiset[x_]:=Fold[funny,{},x]
```

В выпуске 2 мы уже обсуждали команду `UnsortedComplement[x,y]`, которая исключает из списка x элементы, встречающиеся в списке y, но при этом не производит сортировки оставшихся элементов.

1.8. Задайте команду `UsortedComplement` при помощи `pattern matching`.

Решение. Самое очевидное решение состоит в том, чтобы использовать альтернативу:

```
UnsortedComplement[x_,y_]:=DeleteCases[x,
                         Apply[Alternatives,Union[y]]]
```

Напомним, что **расстоянием Хемминга** $d_H(x,y)$ между двумя списками одинаковой длины называется количество позиций, в которых они отличаются. Это понятие особенно часто используется для бинарных списков, все элементы которых равны 0 или 1.

1.9. Задайте функцию, вычисляющую расстояние Хемминга между двумя бинарными списками.

Для списков с элементами из кольца вычетов $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ обычно используется **расстояние Ли**. Оно определяется следующим образом. Выберем в качестве представителей классов $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ целые числа $0, 1, \dots, m-1$. **Весом Ли** $w_L(a)$ элемента $a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ называется $\min(x, m-x)$. **Расстояние Ли** $d_L(x,y)$ между двумя списками x и y длины n с элементами из $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ называется сумма

$$d_L(x,y) = w_L(x_1 - y_1) + \ldots + w_L(x_n - y_n)$$

весов Ли элементов их разности.

1.10. Задайте функцию, вычисляющую расстояние Ли между двумя списками с элементами из $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Фигурирующие в двух следующих задачах функции другим способом уже имплементированы в системе. Мы же предлагаем реализовать их используя рекурсию.

1.11. Дайте рекуррентное определение функции реверсирования.

Решение. Следующее решение в духе традиционного списочного программирования `Lisp` или `Prolog` предложено Романом Мэдером в его замечательной книге `Mathematica`’s Programming Language:

```
rev[x_]:=rev[x,{}]
rev[{},x_]:=x
rev[{x_,y___},{z___}]:=rev[{y},{x,z}]
```

1.12. Дайте рекуррентное определение функции сортировки.

Решение. Вот очередной маленький шедевр из книги Романа Мэдера:

```
sort[{α___,x_,y_,ω___}]:=sort[{α,y,x,ω}] /; OrderedQ[{y,x}];
sort[x_]:=x
```

Чтобы понять, почему это вообще работает, нужно понимать, в каком порядке применяются определения: специальное предшествует общему.

§ 2. Связанные списки

Знание — это страшная сила.

Роджер Бэкон

Тед Эршек[3] заметил, что функции `AppendTo` и `PrependTo` *чрезвычайно* медленно работают с длинными списками.

2.1. Для *линейных* списков предложите быструю альтернативу командам привешивания `PrependTo[x,y]` и `AppendTo[x,y]` и сопоставьте время работы для списков длины $10^4 \leq l \leq 10^6$.

[3] Ted Ersek, Supplementary Mathematica Help Browser.

Решение. Очевидной и весьма неплохой альтернативой является образование *связанных* списков $\{y, x\}$ и $\{x, y\}$ с последующим выравниванием. В упомянутом интервале длин уже ЭТА ПРОСТЕЙШАЯ КОНСТРУКЦИЯ ИСПОЛНЯЕТСЯ В НЕСКОЛЬКО ДЕСЯТКОВ РАЗ БЫСТРЕЕ, ЧЕМ КОМАНДЫ `AppendTo` И `PrependTo`. Разумеется, в таком виде эта конструкция корректно работает только для линейных списков.

В выпуске 2 мы уже обсуждали функцию сжатия `RunLengthEncode`, которая заменяет список на список пар, состоящих из элемента и количества его повторений в серии. Там мы задавали эту функцию в терминах функции `Split`. Вот чуть более элегантная формулировка этого решения, которая приведена в книге Вайсстайна:

```
RunLengthEncode[x_]:=Map[Through[{First,Length}[#]]&,Split[x]]
```

2.2. Определите `RunLengthEncode` не используя `Split`.

Решение. Следующее эффектное решение предложил в 1990 году Франк Зизза:

```
RunLengthEncode[x_]:=ReplaceRepeated[Map[{#,1}&,x],
                      {u___,{v_,n_},{v_,m_},w___}:>{u,{v,n+m},w}]
```

Это решение замечательно иллюстрирует функциональное программирование. Единственный его недостаток состоит в том, что воспользоваться им для практических целей абсолютно невозможно, так как время кодировки списка длины n растет быстрее, чем n^2.

2.3. Задайте более эффективный вариант функции `RunLengthEncode`.

Решение. Следующее решение предложил в 2000 году Тэд Эршек. Вначале зададим вспомогательную функцию, которая либо увеличивает на 1 второй элемент последней пары z из списка пар x, если первый элемент пары y совпадает с первым элементом пары z, либо, в противном случае, дописывает к x пару y:

```
fun[x_,y_]:=If[First[Last[x]]===First[y],
         ReplacePart[x,Last[Last[x]]+1,{-1,-1}],Join[x,{y}]]
```

Теперь осталось дорисовать к каждому элементу исходного списка к 1 и пройтись по получившемуся списку функцией `fun`:

```
RunLengthEncode[x_]:=With[{xx=Map[{#,1}&,x]},
                      Fold[fun,{First[xx]},Rest[xx]]]
```

Теоретически время исполнения этой программы имеет порядок $O(n)$, однако практически из-за необходимости дописывать элементы ко все более длинным спискам, время растет гораздо быстрее. Поэтому уже кодировка списков длины несколько десятков тысяч становится весьма небанальным занятием.

2.4. Как можно в десятки раз ускорить работу `RunLengthEncode`?

Решение. Чего тут думать, мы это только что видели! Нужно просто вместо `Join` образовывать связанный список, а потом один раз в самом конце выровнять получающийся список до списка пар. Так как эта конструкция *во много десятков раз* эффективнее, чем использование Join или Append, мы можем позволить себе вообще не думать, как лучше реализовать последний шаг, и поступить совсем варварски — *полностью* выровнять получающийся список, а потом снова разбить его на пары. Итак, вот

```
funny[x_,y_]:=If[First[Last[x]]===First[y],
                    ReplacePart[x,Last[Last[x]]+1,{-1,-1}],{x,y}]
RunLengthEncode[x_]:=With[{xx = Map[{#,1}&,x]},
      Partition[Flatten[Fold[funny,{First[xx]},Rest[xx]]],2]]
```

Время работы этой реализации имеет порядок $O(n)$ уже не только теоретически, но и *на самом деле*. Кодировка списка длины 10^6 занимает примерно столько же времени, как кодировка списка длины 2500 при помощи функции Зиззи и списка длины 15000 при помощи функции Эршека.

Эту реализацию можно было бы ускорить, избавившись от ReplacePart. В случае списка x, выровненного до глубины 2, для прибавления 1 к одному элементу естественнее всего воспользоваться разреженными списками, а именно, прибавить к x следующий список:

```
Normal[SparseArray[{Length[x],2}->1,{Length[x],2}]]
```

К сожалению, для этого пришлось бы выравнивать получающиеся списки на каждом шаге, что свело бы на нет выигрыш, получающийся от использования связанных списков.

§ 3. Изменение уровней вложенности, revisited

3.1. Разбейте список x на последовательные сегменты длин $(n_1, \dots, n_s)$.

Решение. Вот очевидное решение. Прежде всего, заметим, что концы сегментов являются частичными суммами списка длин сегментов:

```
fence[y_]:=FoldList[Plus,0,y]
```

С другой стороны, начало следующего сегмента равно концу предыдущего $+1$. Поэтому достаточно просто продеть второй аргумент команды Take через начала и концы сегментов. Проще всего сделать это так:

```
split[x_,y_]:=Map[Take[x,#]&,
                    Transpose[{Most[fence[y]]+1,Rest[fence[y]]}]]
```

Еще эффектнее использовать для этой цели Partition с отступом, с тем, чтобы породить списки соседних концов, как это делается в [GKW]. В этом случае обращение к функции fence происходит ровно один раз и ее не обязательно определять отдельно:

```
split[x_,y_]:=Map[Take[x,#+{1,0}]&,
                            Partition[FoldList[Plus,0,y],2,1]]
```

С другой стороны, можно бесхитростно воспользоваться командой Inner:

```
split[x_,y_]:=Inner[Take[x,{#1,#2}]&,
                            Most[fence[y]]+1,Rest[fence[y]],List]
```

командой Thread или любым другим способом.

Команда `Flatten` не только убирает лишние скобки, она еще зачем-то вычисляет все, что попадется под горячую руку. Например, вычисление

```
Flatten[{{Sqrt[4],x+x},{Sin[Pi],z*z}}]
```

возвращает `{2,2*x,0,z^2}`.

3.2. Напишите аналог команды `Flatten`, который убирает лишние уровни вложенности, но не производит никаких других вычислений.

Решение. Вот решение, предложенное Дейвом Вагнером:

```
Attributes[MyFlatten]={HoldFirst};
MyFlatten[x_]:=ReplaceAll[Flatten[
               ReplaceAll[Hold[x],List->Hold],
                    Infinity,Hold],Hold[y__]:>Hold[{y}]]
```

§ 4. Покрытия

Подмножество $\Omega \subseteq 2^X$ называется **покрытием** множества X, если

$$\bigcup_{Y\in\Omega} Y = Y.$$

4.1. Напишите программу, генерирующую все покрытия множества X. И далеко Вам удастся уйти с такой программой?

Ответ. Ну, в лучшем случае, до четырехэлементного множества.

Покрытие множества X называется **минимальным**, если семейство, получающееся из него выбрасыванием любого элемента, не является покрытием. Ясно, что любое минимальное покрытие n-элементного множества содержит $\leq n$ элементов. Покрытия

$$\{\{x_1,\dots,x_n\}\} \qquad \text{и} \qquad \{\{x_1\},\dots,\{x_n\}\}$$

n-элементного множества $\{x_1,\dots,x_n\}$ минимальны, причем это единственное одноэлементное и n-элементное покрытия, соответственно. Гораздо интереснее случай m-элементного покрытия n-элементного множества при $2 \leq m \leq n-1$. Например, существует ровно 6 минимальных 2-элементных покрытий $\{x,y,z\}$, а именно

$$\{\{x,y\},\{z\}\}, \qquad \{\{x,z\},\{y\}\}, \qquad \{\{y,z\},\{x\}\},$$
$$\{\{x,y\},\{x,z\}\}, \qquad \{\{x,y\},\{y,z\}\}, \qquad \{\{x,z\},\{y,z\}\}.$$

4.2. Напишите тест, проверяющий покрытие на минимальность.

4.3. Породите все минимальные 2-элементные и все минимальные 3-элементные покрытия множества $\{x,y,z,w\}$.

4.4. Породите все минимальные 2-элементные и все минимальные 4-элементные покрытия множества $\{u,v,x,y,z\}$.

Льюис Кэрролл придумал картинки, которые позволяют решать подобные задачи вручную[4].

4.5. Напишите программу, генерирующую все минимальные покрытия множества X.

4.6. Напишите программу, генерирующую все минимальные m-элементные покрытия множества X.

4.7. Проведите эксперимент и угадайте, чему равно количество 2-элементных минимальных покрытий n-элементного множества.

Ответ. Это в точности число Стирлинга $\left\{ n+1 \atop 3 \right\}$.

Покрытие множества X называется **разделяющим**, если для каждых двух элементов $x, y \in X$ в этом покрытии найдется множество Y такое, что $x \in Y$, но $y \notin Y$. В 1973 году Катона[5] сформулировал задачу нахождения разделяющих покрытий, минимальных в том смысле, что не существует разделяющих покрытий с меньшим число элементов. Эту проблему решил Цай Мао-Чжэн в 1982 году[6].

4.8. Напишите тест проверяющий, что покрытие является разделяющим.

4.9. Убедитесь, что минимальное разделяющее покрытие n-элементного множества, где $2 \leq n \leq 5$ состоит из n элементов.

Таким образом, в этом случае в качестве минимального разделяющего покрытия множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ можно взять $\{\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}\}$. Однако, обычно полезнее брать не одноэлементные, а $(n-1)$-элементные подмножества, например, $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ является минимальным разделяющим покрытием $\{a, b, c\}$. Дальше картина становится намного интереснее!

4.10. Постройте разделяющее покрытие 6-элементного множества, состоящее из 5 элементов.

Решение. Да чего уж там,

$$\{a, b, c\}, \quad \{a, d, e\}, \quad \{b, d, f\}, \quad \{c, e, f\}, \quad \{d, e, f\}.$$

Ясно, что первое и последнее множества разделяют a, b, c от d, e, f, и, как мы только что видели, три оставшихся разделяют между собой a, b, c и d, e, f.

4.11. Постройте разделяющие покрытия 7-элементного, 8-элементного и 9-элементного множеств, состоящие из 6 элементов.

[4] A.J.Macula, Lewis Carroll and the enumeration of minimal covers. — 1995, vol.68, p.269–274.

[5] G.O.H. Katona, Combinatorial search problem. — In: A survey of combinatorial theory, North-Holland, Amsterdam et al., 1973, p.285–308.

[6] R.Hornsberger, Cai Mao-Cheng's solution to Katona's problem on families of separating subsets. — In: Mathematical Gems, vol.III, Math. Assoc. America, Washington D.C., 1985, p.224–239.

4.12. Докажите, что у 10-элементного множества не существует разделяющего покрытия, состоящего из 6 элементов. Существует ли разделяющее покрытие, содержащее 7 элементов?

4.13. Убедитесь, что покрытие

$$\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\},\quad \{a,b,c,j,k,l,s,t,u\},\quad \{a,d,g,j,m,p,s,v,y\},$$
$$\{j,k,l,m,n,o,p,q,r\},\quad \{d,e,f,m,n,o,v,w,x\},\quad \{b,e,h,k,n,q,t,w,z\},$$
$$\{s,t,u,v,w,x,y,z\},\quad \{g,h,i,p,q,r,y,z\},\quad \{c,f,i,l,o,r,u,x\}$$

26-элементного множества

$$\{a,b,c,\dots,x,y,z\}$$

является разделяющим, причем минимальным среди разделяющих.

§ 5. Системы Штейнера

Рассмотрим пару (X,Ω), где X есть n-элементное множество, а $\Omega\subseteq\bigwedge^m(X)$ — множество, состоящее из m-элементных подмножеств множества X, называемых **блоками**. Такая пара называется **системой Штейнера** с параметрами (k,m,n), если любое k-элементное подмножество $Z\in\bigwedge^k(X)$ содержится в единственном блоке $Y\in\Omega$. Система Штейнера с параметрами (k,m,n) обозначается $S(k,m,n)$, это обозначение особенно часто используется в том случае, когда система с такими параметрами единственна с точностью до изоморфизма.

Система троек Штейнера = `Steiner triple system` — система трехэлементных подмножеств S на n-элементном множестве X такая, что каждая пара различных элементов X содержится в *единственной* тройке из S. Иными словами, через каждые две различные точки $x\neq y$ проходит единственная прямая, на которой лежит еще ровно одна точка $z\neq x,y$.

5.1. Задайте тест, проверяющий, что покрытие множества X является системой троек Штейнера.

5.2. Постройте систему троек Штейнера $S(2,3,7)$.

Ответ. Ну, скажем, такую:

$$\{\{a,b,d\},\{a,c,g\},\{a,e,f\},\{b,c,e\},\{b,f,g\},\{c,d,f\},\{d,e,g\}\}.$$

В действительности, эта система троек представляет собой в точности первый нетривиальный пример *проективной* плоскости, а именно, проективную плоскость на 7 точках = проективную плоскость над полем $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ из *двух* элементов = **плоскость Фано**. Приведенные здесь тройки — это прямые на этой плоскости.

5.3. Постройте систему троек Штейнера $S(2,3,7)$.

Ответ. Годится, например, такая система:

$$\{\{a,b,c\},\{d,e,f\},\{g,h,i\},\{a,d,g\},\{a,e,h\},\{a,f,i\},\\ \{b,d,h\},\{b,e,i\},\{b,f,g\},\{c,d,i\},\{c,e,g\},\{c,f,h\}\}.$$

В действительности, эта система троек представляет собой в точности *второй* нетривиальный пример *аффинной* плоскости, а именно, аффинную плоскость на 9 точках = аффинную плоскость над полем из *трех* элементов. Приведенные здесь тройки — это прямые на этой плоскости. Картинка получится гораздо нагляднее, если занумеровать 9 точек координатами из $\mathbb{F}_3 = \{0,+1,-1\}$:

$$(0,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ (1,0),\ (1,1),\ (1,-1),\ (-1,0),\ (-1,1),\ (-1,-1).$$

5.4. Попытайтесь построить систему троек Штейнера на восьмиэлементом множестве. Удалось ли это?

Ответ. Нет, по следующей причине. Система троек Штейнера на n-элементном множестве должна содержать $n(n-1)/6$ троек — в самом деле, всего имеется $n(n-1)/2$ пары, каждая содержится в единственной тройке, каждая тройка содержит три пары. Однако, 56 не делится на 6. В действительности теорема Киркмана 1847 года утверждает, что система троек Штейнера на n-элементом множестве X существует в том и только том случае, когда $n \equiv 1,3 \pmod 6$.

Построенные системы Штейнера на множестве X, содержащем 7 или 9 элементов, единственны с точностью до изоморфизма. Иными словами, для любых двух систем Штейнера S и T на этом множеств X существует биекция X на себя, устанавливающая биекцию между тройками из S и тройками из T. яследующий случай чуть сложнее. Дело в том, что в отличие от предыдущих случаев на 13-элементном множестве имеется две *неизоморфных* системы троек.

5.5. Постройте *какую-то* систему троек Штейнера на 13-элементном множестве.

Еще сложнее строить *все* системы троек Штейнера на 15-элементном множестве. Таких систем уже 80 штук[7]. Тем не менее одну такую систему построить довольно просто.

5.6. Постройте *какую-то* систему троек Штейнера на 15-элементном множестве.

Указание. Наша система должна содержать 35 троек. Вот две идеи построения системы Штейнера $S(2,3,15)$.

Первый вариант: разобьем 15-элементное множество на 5 трехэлементных блоков:

$$\{a,b,c\},\quad \{d,e,f\},\quad \{g,h,i\},\quad \{j,k,l\},\quad \{m,n,o\}.$$

[7] Они детально обсуждаются в статье V.D.Tonchev, R.S.Weishaar, Steiner triple systems of order 15 and their codes. — J. Stat. Plan. Inference, 1997, vol.58, p.207–216.

Оставшиеся 30 троек строятся так: существует 10 способов выбрать 3 блока и для каждого из этих способов получившиеся 9-элементое множество заново разбиваются на 3 блока. Начальные разбиения можно выбирать почти произвольно, но дальше нужно быть крайне аккуратным.

Второй вариант: выделим один трехэлементный блок, скажем, $\{a,b,c\}$, и разобьем оставшиеся 12 элементов на 3 четверки:

$$\{d,e,f,g\}, \quad \{h,i,j,k\}, \quad \{l,m,n,o\}.$$

Теперь вначале распределим a,b,c по парам внутри этих четверок, что даст нам 6 троек в каждой четверке, итого 18 троек, содержащих все пары вида $\{a,x\}$, $\{b,x\}$ и $\{c,x\}$ и все пары $\{x,y\}$, где x и y лежат в одной четверке. Оставшиеся 16 троек должны содержать по одному элементу из каждой четверки.

Ответ. Вот пример решения, следующего второй идее. Тройка $\{a,b,c\}$ выбрана, вот остальные тройки, содержащие a,b,c:

$$\begin{array}{cccccc}
\{a,d,e\} & \{a,f,g\} & \{a,h,i\} & \{a,j,k\} & \{a,l,m\} & \{a,n,o\} \\
\{b,d,g\} & \{b,e,f\} & \{b,h,j\} & \{b,i,k\} & \{b,l,o\} & \{b,m,n\}, \\
\{c,d,f\} & \{c,g,r\} & \{c,h,k\} & \{c,i,j\} & \{c,l,n\} & \{c,m,o\},
\end{array}$$

А вот тройки, не содержащие ни одного из этих элементов. Как мы только что объяснили, каждая такая тройка обязана начинаться с d,e,f или g:

$$\begin{array}{cccc}
\{d,h,l\} & \{d,i,m\} & \{d,j,o\} & \{d,k,n\} \\
\{e,h,m\} & \{e,i,l\} & \{e,j,n\} & \{e,k,o\} \\
\{f,h,n\} & \{f,i,o\} & \{f,j,m\} & \{f,k,l\} \\
\{g,h,o\} & \{g,i,n\} & \{g,j,l\} & \{g,k,m\}
\end{array}$$

Неизоморфных систем на 19-элементном множестве уже миллиарды[8].

5.7. Постройте систему четверок Штейнера $S(2,4,13)$.

Ответ. Учитывая, что $13 = 3^2+3+1$, это совсем просто: требуемая система представляет собой проективную плоскость над полем $\mathbb{F}_3$.

В 1908 году Барлау построил системы четверок Штейнера $S(3,4,8)$ и $S(3,4,10)$ и доказал их единственность.

5.8. Постройте систему четверок Штейнера $S(3,4,8)$.

Ответ. В этой системе $\binom{8}{3}/4 = 14$ блоков. Например, таких:

$$\{a,b,c,f\}, \quad \{a,b,d,h\}, \quad \{a,b,e,g\}, \quad \{a,c,d,e\}, \quad \{a,c,g,h\},$$
$$\{a,d,f,g\}, \quad \{a,e,f,h\}, \quad \{b,c,d,g\}, \quad \{b,c,e,h\}, \quad \{b,d,e,f\},$$
$$\{b,f,g,h\}, \quad \{c,d,f,h\}, \quad \{c,e,f,g\}, \quad \{d,e,g,h\}.$$

[8]D.R.Stinson, H.Ferch, 2000000 Steiner triple systems of order 19. — Math. Comput., 1985, vol.44, p.533–535.

5.9. Постройте систему четверок Штейнера $S(3,4,10)$.

В 1960 году Ханани[9] доказал, что для существования системы Штейнера $S(3,4,n)$ необходимо и достаточно, чтобы $n \equiv 2,4 \pmod 6$. Однако, не владея общей теорией построить даже такую совсем маленькую систему как $S(3,4,14)$ вручную совсем небанально. В 1972 году Мендельсон и Хун[10] доказали, что существует ровно четыре таких системы с точностью до изоморфизма.

§ 6. Теорема ван дер Вардена

Знаменитая теорема ван дер Вардена утверждает, что для любых натуральных l и m существует такое натуральное число $n(l,m)$, называемое числом ван дер Вардена такое, что для любого разбиения начального отрезка натурального ряда $\{1,2,\ldots,n\}$, где $n \geq n(l,m)$ на m подмножеств хотя бы в одном из них найдется арифметическая прогрессия длины $\geq l$. Вычислять число ван дер Вардена по крайней мере так же трудно, как число Рамсея.

Ясно, что первый нетривиальный случай этой теоремы возникает, когда мы требуем наличия арифметических прогрессий длины 3 в любом разбиении множества $\{1,2,\ldots,n\}$ на *два* подмножества. В следующем упражнении мы доказываем, что $n(3,2)=9$.

6.1. Задайте тест того, что множество натуральных чисел содержит арифметическую прогрессию длины 3.

6.2. Задайте тест того, что множество натуральных чисел содержит арифметическую прогрессию длины m.

6.3. Постройте разбиение $\{1,2,\ldots,8\}$ на два подмножества, в каждом из которых нет арифметических прогрессий длины 3. Сколько существует таких разбиений? Докажите, что в любом разбиении $\{1,2,\ldots,9\}$ на два подмножества хотя бы одно из них содержит арифметическую прогрессию длины 3.

Решение. Вот *все* неупорядоченные разбиения $\{1,2,\ldots,8\}$ на два класса, ни один которых не содержит арифметической прогрессии длины 3:

$$\{\{1,2,5,6\},\{3,4,7,8\}\}, \qquad \{\{1,3,6,8\},\{2,4,5,7\}\}, \qquad \{\{1,4,5,8\},\{2,3,6,7\}\}.$$

Добавляя 9 в любой из классов какого-то из этих разбиений мы всегда получим в получающемся классе одну из следующих прифметических прогрессий:

$$1,5,9, \qquad 3,6,9 \qquad 5,7,9 \qquad 7,8,9.$$

[9] M.Hanani, On quadruple systems. — Canad. J. Math., 1960, vol.12, p.147– 157.

[10] N.S.Mendelsohn, S.H.Y.Hung, On the Steiner systems $S(3,4,15)$ and $S(4,5,15)$. — Utilitas Math., 1972, vol.1, p.5-15.

В действительности на домашнем компьютере можно в таком же стиле вычислить еще ровно два числа ван дер Вардена, а именно $n(4,2) = 35$ и $n(3,3) = 27$. Уже числа $n(5,2) = 178$ и $n(4,3) = 76$ находятся сегодня за пределами прямого перебора в домашних условиях.

Даже получать *оценки* чисел ван дер Вардена прямыми методами довольно трудно. Известно, например, что

$$n(3,m) \leq 3^{m^c}, \qquad n(4,m) \leq e^{e^{e^{m^c}}}$$

для некоторых констант c. Нет сомнения, что подобные сверхэкспоненциальные оценки весьма далеки от реалистических. Строить нижние оценки чисел ван дер Вардена также чрезвычайно трудно. Вот для разнообразия одна простая нижняя оценка, полученная Берлекампом[11]. Для простого p выполняется неравенство $n(p+1,2) > p2^p$.

Теорема Шура утверждает, что для любого натурального m существует такое натуральное число $S(m)$, называемое **числом Шура**, что для любого разбиения начального отрезка натурального ряда $\{1,2,\dots,n\}$, где $n \geq S(m)$ на m подмножеств хотя бы в одном из них найдутся такие элементы x,y,z, не обязательно различные, что $x+y=z$. Шур в 1916 году доказал, что $S(n) \leq \lfloor n!e \rfloor$

Еще одна оценка числа Шура $S(n) \leq R(n)-2$, где $R(n)$ — число Рамсея.

6.4. Напишите программу, находящую все подмножества в $\{1,2,\dots,n\}$, в которых ни один элемент не делит никакой другой элемент того же подмножества. Явно вычислите ответ для $n \leq 10$.

6.5. Напишите программу, находящую все подмножества в $\{1,2,\dots,n\}$, в которых ни один элемент не делит никакую *непустую* сумму других элементов того же подмножества. Явно вычислите ответ для $n \leq 10$.

6.6. Напишите программу, которая генерирует перестановку множества $\{1,2,\dots,n\}$ обладающую следующими свойствами: она начинается с 1, заканчивается n, сумма каждых двух соседних членов есть простое число. Единственна ли такая перестановка? Фактически найдите все такие перестановки для $n \leq 10$.

Ответ. При $n \geq 2$ такая перестановка всегда существует: 12, 123, 1234, 14325, 143256, и т.д. Однако, при $n \geq 7$ она перестает быть единственной.

§ 7. Сортировка кучками

Give us the tools and we will finish the job.

Winston Churchill

В настоящем параграфе мы опишем еще один простой, но чрезвычайно эффективный алгоритм сортировки, **сортировку кучками** = `heapsort`.

[11] E.A.Berlekamp, Construction of partitions which avoid long arithmetic progressions. — Canad. Math. Bull., 1968, vol.11, p.409–414.

По-русски сортировка кучками часто называется пирамидальной сортировкой, но этот термин представляется нам крайне неудачным, так как в теории параллельных алгоритмов термин `пирамида` = `pyramid` используется для описания совершенно другой структуры. Сортировка кучками лишь чуть сложнее, чем `quicksort`, но при этом она обладает временной эффективностью $O(n\log(n))$ не только в среднем, но даже в худшем случае.

Кучкой называется древесная структура на списке $(x_1,\dots,x_n)$, определяемая следующим образом. Элементы списка помещаются в вершины бинарного дерева. Иными словами, детьми элемента x_i провозглашаются элементы x_{2i}, если $2i\le n$ и, кроме того, x_{2i+1}, если $2i+1\le n$. Если $2i\ge n$, то детей у элемента x_i нет. Тогда условие, определяющее кучку состоит в том, что элемент x_i не меньше своих детей, $x_i\ge x_{2i},x_{2i+1}$.

7.1. Задайте критерий того, что рассматриваемый как бинарное дерево список является кучкой.

Идея `heapsort` состоит в следующем.

• В кучке элемент x_1 является наибольшим элементом и, значит, в отсортированном списке должен идти последним. Переставим x_1 с x_n и рассмотрим список длины $n-1$, получающийся отбрасыванием последнего элемента.

• В корне этого нового списка стоит x_n, для которого — и только для него! — свойство кучки может нарушаться. Переставив x_n с большим из его детей, мы восстановим свойство кучки в корне, но теперь свойство кучки может нарушиться в корне дочернего поддерева. Продолжая отгонять x_n вниз, каждый раз переставляя его с большим из детей, мы за $\le\log_2(n)-1$ шагов восстановим свойство кучки.

• В получившейся кучке наибольший элемент снова стоит в первой позиции и переставляя его с элементом в позиции $n-1$, мы получаем список, в котором отсортированы два последних элемента. В полученном списке свойство кучки снова может нарушаться только в корне, и продолжая действовать таким образом, как выше, мы отсортируем любую кучку длины n за время порядка $O(n\log(n))$.

Осталось заметить, что описанный здесь способ окучивания позволяет превратить любой список длины n в кучку. В самом деле, для этого методом перестановки с большим из детей, мы последовательно восстановим свойство кучки в позициях $x_{n/2},x_{n/2-1},\dots,x_1$, что займет время порядка $O(n)$.

7.2. Определите функцию `heapify`, которая превращает список в кучку.

7.3. Определите функцию `heapsort`, реализующую описанный выше алгоритм сортировки.

7.4. Сравните скорость работы алгоритма `heapsort` с описанным в § ? алгоритмом `quicksort`.

Только что описанный алгоритм `heapsort` является *асимптотически* оптимальным. Хотя, конечно, имеются алгоритмы, которые в реальных ситуациях работают лучше, чем `heapsort`. Кроме того, при наличии дополнительной информации о списке, в некоторых случаях можно отсортировать его за время порядка $O(n)$.

Глава 2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО АРИФМЕТИКЕ

> Как замечательно, что существуют люди, способные придавать больше значения, больше ценности определению отдаленного десятичного знака или места какой-нибудь запятой, нежели самой головокружительнной новости, самой грандиозной катастрофе или даже собственной жизни.
>
> Поль Валери, *Смесь*

В настоящей главе мы обсуждаем некоторые дополнительные вопросы арифметики. За исключением первого параграфа, посвященного системам счисления, их интерес чисто развлекательный. Главную мысль этой и следующей глав можно сформулировать так: при помощи компьютера можно считать вещи, которые никогда не пришло бы в голову считать вручную.

§ 1. Системы счисления

> Саша Найман — математик, выпускник мехмата. Стало быть, считать умеет. По крайней мере, до десяти.
>
> Иван Неизвестный

До сих пор мы обычно работали с числами в десятичной системе счисления. Однако, во многих вопросах программирования и передачи информации часто используются другие **базы**[12], в особенности, базы 2,3,8 и 16. Все обычные команды работы с цифрами такие, как `IntegerDigits`, `RealDigits`, `FromDigits` допускают в качестве дополнительного параметра базу b.

`b^^y`	перевод из записи в базе b в десятичную запись
`BaseForm[x,b]`	перевод из десятичной записи в запись в базу b
`IntegerDigits[n,b]`	цифры натурального числа n в базе b
`RealDigits[x,b]`	цифры вещественного числа x в базе b
`FromDigits[list,b]`	реконструкция числа по цифрам в базе b

Использование этих функций ясно само по себе. Отметим, тем не менее, несколько специфических моментов.

• Минимальная разрешенная база для этих команд равна 2, а максимальная — 36. Сама база указывается в десятичной записи.

• Ограничение в предыдущем пункте связано с тем, что в качестве дополнительных цифр для баз, больших чем 10, используются латинские буквы

[12] Или, как принято говорить в школьном курсе, **основания системы счисления**.

`a - z` или, что то же самое, `A - Z`. При этом строчные и прописные буквы *не различаются*.

• Само преобразуемое число может иметь формат целого числа или приближенного вещественного числа.

1.1. Приведите первые 100 простых чисел в двоичной записи.

Решение. Ну, например, так:

```
Map[BaseForm[#,2]&,Prime[Range[100]]]
```

Впрочем, переводить числа из одной системы счисления в другую совсем просто и не помня, как называются внутренние функции.

1.2. Задайте функцию вычисляющую натуральное число по списку его цифр по основанию b.

Решение. С точки зрения приложений естественнее всего не зашивать b в определение этой функции, а считать его еще одним параметром:

```
fromdigits[x_,b_]:=Fold[(b*#1+#2)&,0,x]
```

Удобство подобной общей конструкции состоит в том, что список x не обязан состоять из цифр, да и основание системы счисления b совсем не обязано быть натуральным числом, а может быть чем угодно, хоть тушкой, хоть символом! Например, вычисление `fromdigits[{a,b,c,d,e},x]` дает `e+x(d+x(c+x(b+a*x)))`, что подозрительно напоминает вычисление многочлена по схеме Руффини—Горнера.

§ 2. Дополнительные задачи о вещественных числах

> Например, покупая и сбрасывая акции, он руководствовался не диаграммами роста и предсказаниями аналитиков, а тем, что в цифровых последовательностях на экране компьютера возникали числа “43”, “29” и, конечно, “34” — причем ему было совершенно не важно, до запятой или после.
>
> Виктор Пелевин, ДПП(NN)

В выпуске 1 мы уже обсуждали **константу Рамануджана** $e^{\pi\sqrt{163}}$. Сейчас мы продолжим эту тему и чуть подробнее обсудим **почти целые числа**, т.е. такие вещественные числа, которые неотличимы от целых при всех обычных приближенных вычислениях.

2.1. Верно ли, что $e^\pi - \pi = 20$?

Указание. А Вы посчитайте $\cos(\ln(20+\pi))$!

Ответ. Почти.

Известная проблема спрашивает, являются ли e и π алгебраически независимыми. В численном анализе подобный вопрос не возникает, так как Д.Уилсон (почти) обнаружил алгебраическую зависимость между e и π.

2.2. Верно ли, что $e^6 = \pi^4 + \pi^5$?

Ответ. Почти.

2.3. Возвращаясь к магическому числу 163, вычислите $163/\ln(163)$. А теперь посмотрите, существуют ли еще какие-нибудь натуральные числа < 10000, для которых $n/ln(n)$ отличается от ближайшего целого меньше, чем на 10^{-5}.

2.4. Найдите число, для которого $n/ln(n)$ отличается от ближайшего целого меньше, чем $163/\ln(163)$.

2.5. Вычислите $163(\pi - e)$.

2.6. Вычислите число

$$\left(\frac{\ln(640320^3 + 744)}{\pi}\right)^2$$

с точностью до 30 знаков после запятой, а потом с точностью до 40.

Следующее изумительное наблюдение принадлежит Госперу.

2.7. Вычислите число

$$2 - 262537412640768744e^{-\pi\sqrt{163}} - 196884e^{-2\pi\sqrt{163}} + 103378831900730205293632e^{-3\pi\sqrt{163}}$$

с точностью до 50 знаков после запятой, а потом с точностью до 60.

2.8. Вычислите $x^{16} - 20x^{12} - 666x^8 - 3860x^4 + 1$, где $x = \sqrt[4]{3} - \sqrt[4]{2}$.

Поиск соотношений между вещественными числами с целыми коэффициентами представляет собой довольно тонкое дело. Первый реально работающий алгоритм — алгоритм Фергюсона—Форкейда[13,14] Два других используемых сегодня для этой цели алгоритма были открыты с интервалами в 10 лет, это алгоритм PSOS[15] и алгоритм PSQL[16]

§ 3. Дополнительные задачи о комплексных числах

Эйлер заметил, что $\left(\dfrac{2+i}{2-i}\right)\left(\dfrac{3+i}{3-i}\right) = i$, или, что то же самое,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Кстати, нам абсолютно непонятно, как можно доказать — или, тем более, обнаружить — подобное соотношение на основе школьной тригонометрии,

---

[13] H.R.P.Ferguson, R.W.Forcade, Generalization of the Euclidean algorithm for real numbers to all dimensions higher than two. — Bull. Amer. Math. Soc., 1979, vol.1, p.912–914.

[14] H.R.P.Ferguson, A non-inductive $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ algorithm that constructs linear relations for n $\mathbb{Z}$-linearly dependent real numbers. — J. Algorithms, 1989, vol.8, p.131–145.

[15] D.H.Bailey, H.R.P.Ferguson, Numerical results on relations between numerical constants using a new algorithm. — Math. Comput., 1989, vol.53, p.649–656.

[16] H.R.P.Ferguson, D.H.Bailey, S.Arno, Analysis of PSLQ, an integer relation finding algorithm. — Math. Comput., 1999, vol.68, p.351–369.

без обращения к комплексным числам! Чтобы найти другие соотношения такого вида, нам надо организовать поиск целых чисел m, n таких, что $\left(\frac{m+i}{m-i}\right)^k\left(\frac{n+i}{n-i}\right)^l = i$ для некоторых k, l.

3.1. Найдите еще три нетривиальных соотношения такого вида.

Решение. Поиграв с оценками в выражении вида

```
Select[Flatten[Table[{m,n,k,((m+I)^k(n+I))/((m-I)^k(n-I))},
        {m,1,20},{n,-300,300},{k,1,5}],2],#[[4]]==I&]
```

мы придем к следующим формулам:

$$\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2\left(\frac{7-i}{7+i}\right) = \left(\frac{3+i}{3-i}\right)^2\left(\frac{7+i}{7-i}\right) = \left(\frac{5+i}{5-i}\right)^4\left(\frac{239-i}{239+i}\right) = i.$$

Или, что то же самое,

$$2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}. \qquad 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Это единственные известные формулы такого вида с двумя слагаемыми, первая из которых называется **формулой Германна**, вторая — **формулой Хаттона**, а третья — **формулой Макина**[17]

Вообще, формулы такого вида с любым количеством слагаемых называются **формулами типа Макина**. Искать аналогичные соотношения, в которых аргументы не являются египетскими дробями, чуть сложнее. Одно такое соотношение также было найдено Эйлером:

$$5\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right) + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{79}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Впрочем, вместо этого можно искать формулы типа Макина с египетскими дробями, но не с двумя, а с большим количеством слагаемых. Первая такая формула была обнаружена Гауссом, вот она:

$$12\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{18}\right) + 8\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{57}\right) - 5\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

3.2. Найдите несколько формул такого типа с тремя слагаемыми.

Решение. Количество формул, которые Вам удастся найти, определяется исключительно Вашим терпением, поэтому ограничимся несколькими

[17] J.M.Borwein, P.B.Borwein, Pi and the AGM: a study in analytic number theory and computational complexity. John Wiley, N.Y. et al, 1987.

формулами с маленькими знаменателями и совсем маленькими коэффициентами:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{13}\right)=\frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{\pi}{4}.$$
$$4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{70}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{99}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Вторая из них известна как формула Страссницкого, а третья — как формула Резерфорда. Кстати, сравнивая первые два соотношения, мы видим, что

$$\left(\frac{4+i}{4-i}\right)\left(\frac{13+i}{13-i}\right)=\left(\frac{5+i}{5-i}\right)\left(\frac{8+i}{8-i}\right).$$

3.3. Найдите формулу, получающуюся изменением коэффициентов — но не знаменателей! — в формуле Гаусса.

Решение. Такой же поиск, как всегда, но теперь ищутся не знаменатели, а показатели степени, при которых имеет место равенство

$$\left(\frac{18+i}{18-i}\right)^r\left(\frac{57+i}{57-i}\right)^s\left(\frac{239+i}{239-i}\right)^t=i.$$

Довольно быстро мы придем к формуле Штермера

$$6\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{18}\right)+2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{57}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

§ 4. Тригонометрия

4.1. Вычислите $\cos(m\pi/32)$ для $m=1,3,5,7,9,11,13,15$.

Указание. Сколько существует способов расставить знаки внутри радикала $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$?

Вот еще несколько задач в духе § 8 главы 3 и § 3 главы 4.

4.2. Вычислите произведения косинусов

$$\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right),\qquad\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right),$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right).$$

Почему в первых трех случаях мы берем произведение трех значений, а в третьем случае — пяти?

Второе из этих равенств в форме $\cos(20^o)\cos(40^o)\cos(60^o)=1/8$ приведено в книге Фейнмана под названием **закона Морри**.

4.3. А теперь вручную вычислите произведения тангенсов

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{7}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{7}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{7}\right),\qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{9}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{9}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{9}\right),$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{11}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{11}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{11}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{11}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{11}\right).$$

В § 3 главы 4 посмотрев на выражения для $\cos(\pi/7)$, мы не стали даже пытаться приводить явные формулы для $\cos(\pi/9)$, $\cos(\pi/13)$, $\cos(\pi/18)$, $\cos(\pi/19)$, $\cos(\pi/27)$ — errore, errore!

4.4. Вычислите $\cos(\pi/9)$ и $\sin(\pi/9)$.

Указание. Теорема Гаусса—Венцеля утверждает, что сделать это оставаясь в области вещественных чисел — или, что то же самое, построить правильный 9-угольник при помощи циркуля и линейки — невозможно. Но кто же заставляет нас работать с вещественным числами! Решите кубическое уравнение.

Ответ. Ответ гораздо проще, чем можно ожидать:

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) = 2^{-4/3}\left(\sqrt{1-i\sqrt{3}}+\sqrt{1+i\sqrt{3}}\right),$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) = 2^{-4/3}\left(\sqrt{1-i\sqrt{3}}-\sqrt{1+i\sqrt{3}}\right).$$

4.5. А теперь вычислите $\cos(\pi/18)$ и $\sin(\pi/18)$.

В выпуске 1 мы отказались и от того, чтобы явно приводить значения первообразных корней степени 30 из 1. В энциклопедии Вайсстайна приведены следующие значения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{30}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{7+\sqrt{5}+\sqrt{6(5+\sqrt{5})}},$$
$$\cos\left(\frac{7\pi}{30}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6(5+\sqrt{5})}},$$
$$\cos\left(\frac{11\pi}{30}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{6(5+\sqrt{5})}},$$
$$\cos\left(\frac{13\pi}{30}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5+\sqrt{5})}}.$$

4.6. Из общих соображений объясните, почему эти значения не могут быть верными одновременно, исправьте их, а потом проверьте результат на компьютере.

Ответ. Поскольку все это происходит над полем $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, очевидно, что второе и четвертое значения неверны, должно быть

$$\cos\left(\frac{7\pi}{30}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}+\sqrt{6(5-\sqrt{5})}},$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{30}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{6(5-\sqrt{5})}}.$$

Глава 3. РЕКРЕАТИВНАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

He had learned of the existence of a number computed to a relative degree of accuracy to be of such magnitude and of so many places, e.g., the 9th power of the 9th power of 9, that, the result having been obtained, 33 closely printed volumes of 1000 pages each of innumerable quires and reams of India paper would have to be requisitioned in order to contain the complete tale of its printed integers of units, tens, hundreds, thousands, tens of thousands, hundreds of thousands, millions, tens of millions, hundreds of millions, billions, the nucleus of the nebula of every digit of every series containing succinctly the potentiality of being raised to the utmost kinetic elaboration of any power of any of its powers.

James Joyce, *Ulysses*

The first law of small numbers: there aren’t enough small numbers to meet the many demands made of them.

Richard Guy

Настоящая глава носит чисто развлекательный характер, здесь нет ни одной идеи, которую профессиональный математик мог бы назвать глубокой или, хотя бы, содержательной. В то же время, здесь есть много стандартных задач, которые можно предлагать студентам для проверки их программистских навыков.

§ 1. Рекреативная арифметика, revisited

‘The time has come’, the Walrus said, ‘To talk of many things’.

Lewis Carroll

В этом параграфе мы формулируем ряд тривиальных (в математическом смысле) и несложных (в программистском смысле) задач, использующих те же идеи, что в Гл.1. Мы не приводим их решений с тем, чтобы преподаватель мог воспользоваться ими на зачетах.

Число называется **пандигитальным** = `pandigital`, если оно содержит все цифры $1, \ldots, 9$.

1.1. В 1727 году Джон Хилл утверждал, что наименьшее пандигитальное число, являющееся полным квадратом, равно 11826^2. Так ли это?

Число n называется **числом Капрекара**, если его квадрат можно разбить на две группы цифр, правая из которых содержит столько же цифр, как n, которые дают в сумме n. Например, $2728^2 = 7441984$, причем $744 + 1984 = 2728$, а $7272^2 = 52881984$, причем $5288 + 1984 = 7272$.

1.2. Найдите все числа Капрекара < 100000. Какие закономерности сразу бросаются в глаза в этом списке?

1.3. Найдите первые 20 чисел Капрекара вида $11\dots11$.

Число n называется **числом Армстронга**, если оно является суммой каких-то — одинаковых! — степеней своих цифр. Ясно, что любое однозначное натуральное число является числом Армстронга, но имеются и нептривиальные примеры: $407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$, $9474 = 9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4$.

1.4. Найдите все числа Армстронга < 100000.

Число n называется **степенным**, если оно является суммой каких-то — различных! — степеней своих цифр. Например, число 89 не является числом Армстронга, но оно, конечно, степенное, так как $89 = 8^1+9^2$. Единственный другой пример двузначного степенного числа, это $24 = 2^3 + 4^2$.

1.5. Цифры от 1 до 9 образуют серию степенных чисел длины 9. Найдите более длинную серию последовательных степенных чисел.

Обратите внимание, что число 89 является суммой не просто каких-то, а *последовательных* степеней своих цифр. Существуют и другие такие числа, например,

$$2646798 = 2^1 + 6^2 + 4^3 + 6^4 + 7^5 + 9^6 + 8^7.$$

1.6. Найдите все числа $< 10^6$, являющиеся суммой последовательных степеней своих цифр.

Таких чисел на удивление мало, вот они все:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 89, 135, 175, 518, 598, 1306, 1676, 2427.

Число называется **курьезным**, если оно равно сумме факториалов своих цифр. Ясно, что числа 1,2 и $125 = 1! + 2! + 5!$ курьезные.

1.7. Существуют ли еще курьезные числа? Сколько?

Рассмотрим множество

$$H = \{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 1 \pmod 4\} = \{1, 5, 9, 13, 17, \dots\},$$

всех чисел, сравнимых с 1 по модулю 4. Число q из H называется **простым Гильберта**, если $q \neq 1$ и у q нет никаких собственных делителей в H.

1.8. Каких чисел среди простых Гильберта $< 10^6$ больше, простых или составных?

1.9. Верно ли, что каждый элемент H единственным образом представляется в виде произведения простых Гильберта?

Число n называется **числом Смита**, если оно не является простым и сумма его цифр равна сумме цифр всех его простых делителей, считаемых с учетом кратности. Например, $9708 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 809$, причем $9 + 7 + 0 + 8 = 2 + 2 + 3 + 8 + 0 + 9$.

1.10. Каких чисел Смита $< 10^4$ больше, четных или нечетных?

1.11. Существуют ли два последовательных числа Смита?

1.12. Ясно, что $1111 = 11 \cdot 101$ является числом Смита. Существуют ли другие числа Смита вида $11\ldots11$ с ≤ 70 цифрами?

Говорят, что пара последовательных натуральных чисел $n, n+1$ образует **пару Руфь—Аарона**, если суммы простых делителей n и $n+1$, считая кратности, совпадают.

1.13. Найдите все пары Руфь—Аарона ≤ 10000.

Вернемся к реверсированию цифр. Простое число 61 обладает тем свойством, что реверсированное к нему число 16 является квадратом.

1.14. Найдите все простые числа $< 10^5$, реверсированные к которым являются квадратами. Сколько чисел $< 10^6$ чисел с таким свойством?

Простое число 521 обладает тем свойством, что реверсированное к нему число 125 является кубом.

1.15. Найдите еще два простых числа, реверсированные к которым являются кубами.

В выпуске 1 мы уже обсуждали **автоморфные числа**, квадрат которых заканчивается самим этим числом. Оказалось[18], что (если допустить в качестве первой цифры 0) для каждого $n > 1$ имеется ровно два n-разрядных автоморфных числа, образующие две бесконечные серии, в каждой из которых следующее число получается из предыдущего дорисовыванием одной цифры слева:

5, 25, 625, 0625, 90625, 890625, 2890625 ... ,

6, 76, 376, 9376, 09376, 109376, 7109376, ...

1.16. Напишите программу, строящую дальнейшие члены этих последовательностей.

Назовем число **триморфным**, если его куб заканчивается на само это число. Разумеется, любая положительная степень автоморфного числа заканчивается на само это число, так что любое автоморфиное число триморфно. Однако триморфных чисел гораздо больше. Например, по очевидной причине триморфно любое число, составленное из одних девяток.

1.17. Найдите все триморфные числа $< 10^5$, угадайте паттерн и проверьте его для чисел нескольких следующих разрядов.

В выпуске 1 мы рассматривали примеры сокращения дробей, получающихся вычеркиванием цифр в числителе и знаменателе: $16/64 = 1/4$. Сейчас мы рассмотрим еще одну аналогичную задачу. А именно, в некоторых случаях переползание некоторых цифр в показатели степени не меняет результата. Например, $2592 = 2^5 9^2$, $24425 = 3^4 425$.

1.18. Найдите все подобные случаи для чисел ≤ 100000.

1.19. Опишите все мультипликативно совершенные числа, равные произведению собственных делителей.

---

[18]Дальнейшие ссылки можно найти в V.de Guerre, R.A.Fairbairn, Automorphic numbers. — J. Recr. Math., 1967, vol.1, p.173–179.

Благоприятные числа строятся следующим образом. Выпишем вначале все *нечетные* натуральные числа 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ... Первое число > 1 в этом списке — это 3, поэтому вычеркнем из исходного списка каждый третий член. Получим список 1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, ... Первое число > 3 в получившемся списке — это 7, поэтому вычеркнем в нем каждый седьмой член. Получим список 1, 3, 7, 9, 13, 15, 21, ... Числа, остающиеся после завершения этого процесса, называются **благоприятными** числами.

1.20. Напишите программу, порождающую благоприятные числа $< 10^n$.

1.21. Для небольших n сравните количество благоприятных чисел $< 10^n$ с количеством простых $< 10^n$ и сформулируйте гипотезу.

1.22. Для небольших n сравните количество благоприятных близнецов $< 10^n$ с количеством простых близнецов $< 10^n$ и сформулируйте гипотезу.

1.23. Проверьте справедливость гипотезы Гольдбаха с заменой простых чисел на благоприятные числа для всех $n < 10^5$.

Число, составленное из двух чередующихся цифр $abab\dots$ называется **волнообразным** = `undulating`. В дальнейшем мы рассматриваем только нетривиальные случаи, иными словами, мы отбрасываем однозначные и двузначные числа и случай $a = b$.

1.24. Напишите программу, порождающую все n-значные волнообразные числа.

1.25. Мы хорошо знаем, что волнообразное число 121 является полным квадратом. Найдите еще хотя бы три волнообразных полных квадрата.

Ответ. Это $484 = 22^2$, $676 = 26^2$ и $69696 = 264^2$. Было бы странно, если бы Вам удалось найти еще хотя бы один, так как он содержит не меньше миллиона цифр[19].

1.26. Найдите хотя бы одно волнообразное число, являющееся полным кубом.

Ответ. Одно такое число много раз нам встречалось, это $343 = 7^3$. Никаких других таких чисел, содержащих меньше 100 цифр, просто нет.

§ 2. Экономичные и расточительные числа

> Computers make it easier to do a lot of things, but most of the things they make it easier to do don't need to be done.
>
> Andy Rooney

Натуральное число называется

• **экономичным** = `economical` если для записи его разложения на простые требуется меньше цифр, чем для записи самого числа,

[19] C.A.Pickover, Is there a doubly smoothly undulating integer. — Computers, pattern, chaos and beauty. St. Martin's Press, N.Y., 1990.

• **эквидигитальным** = `equidigital` если для записи его разложения на простые требуется столько же цифр, чем для записи самого числа,

• **расточительным** = `wasteful`, если для записи его разложения на простые требуется больше цифр, чем для записи самого числа.

При этом рассматривается *каноническое* разложение на простые в котором считаются *все* цифры, как цифры самих простых, так и показателей степени $\neq 1$. Например, число $125 = 5^3$ экономное, так как для записи его канонического разложения требуется всего две цифры, а число $4 = 2^2$ расточительное, так как для записи его канонического разложения требуется целых две цифры.

2.1. Задайте критерии экономичности, эквидигитальности и расточительности числа.

Указание. Не забудьте отбросить 1 в показателе степени! Например, для записи канонического разложения $239 = 239^1$ требуется всего три цифры $2, 3, 9$, а не четыре. Примите какое-то решение о том, сколько все-таки цифр в каноническом разложении числа 1.

Решение. Прежде всего, зададим список цифр канонической факторизации:

```
factdigit[n_]:=If[n==1,{1},Flatten[Map[IntegerDigits,
            ReplaceRepeated[FactorInteger[n],{x_,1}->{x}]]]]
```

Зададим теперь критерий экономичности, два других критерия аналогичны:

```
economQ[n_]:=(Length[factdigit[n]]<Length[IntegerDigits[n]])
```

2.2. Найдите экономичные числа $n < 10^4$.

Ответ. Приведем получающийся список:

125, 128, 243, 256, 343, 512, 625, 729, 1024, 1029, 1215, 1250, 1280, 1331, 1369, 1458, 1536, 1681, 1701, 1715, 1792, 1849, 1875, 2048, 2187, 2197, 2209, 2401, 2560, 2809, 3125, 3481, 3584, 3645, 3721, 4096, 4374, 4375, 4489, 4802, 4913, 5041, 5103, 5329, 6241, 6250, 6561, 6859, 6889, 7203, 7921, 8192, 9375, 9409.

Видно, что среди столь маленьких чисел встречаются только степени *одного* совсем маленького простого и произведения таких степеней на *второе* простое в первой степени. Однако, уже следующее экономичное число $10000 = 2^4 \cdot 5^4$ нарушает эту закономерность.

2.3. Найдите экономичные числа $n < 10^5$, у которых по крайней мере три различных простых делителя.

2.4. Найдите наименьшее экономичное число, содержащее три *кратных* простых делителя.

2.5. Найдите наименьшее экономичное число, содержащее четыре *различных* простых делителя.

2.6. Какие числа встречаются чаще, экономичные или расточительные?

Можно рассмотреть вариант этого определения, в котором каждый простой множитель выписывается столько раз, какова его кратность.

2.7. Задайте критерии экономичности, эквидигитальности и расточительности числа при этом новом определении.

Решение. Прежде всего, зададим список простых множителей числа, в котором каждый множитель повторен столько раз, какова его кратность:

```
primefact[n_]:=Flatten[
          Map[Table[#[[1]],{#[[2]]}]&,FactorInteger[n]]]
```

Теперь критерий экономичности будет выглядеть так:

```
econQ[n_]:=(Length[Flatten[IntegerDigits[primefact[n]]]]<
                              Length[IntegerDigits[n]])
```

2.8. Существуют ли экономичные числа при этом новом определении?

§ 3. Мультипликативная стойкость

Занимательная паталогоанатомия.

`fomenko.ru`

Определим функцию f, сопоставляющую неотрицательному целому числу n произведение его цифр. Говорят, что **мультипликативная стойкость** = `multiplicative persistence` числа n равна m, если требуется m итераций этой функции f, чтобы получить из n однозначное число. Ясно, что однозначные числа и только они имеют мультипликативную стойкость 0.

3.1. Для каждого m от 1 до 8 найдите наименьшее натуральное число, имеющее мультипликативную стойкость m.

3.2. Для каждого m от 1 до 8 найдите наименьшее простое, имеющее мультипликативную стойкость m.

Ясно, также, что следующие два преобразования не меняют мультипликативную стойкость числа.

• Произвольная перестановка цифр числа.

• Дорисовывание или вычеркивание в качестве цифр произвольного количества единиц.

В следующих задачах мы называем число **прототипичным**, если оно не содержит цифры 1 и его цифры расположены в порядке убывания.

3.3. Найдите все прототипичные числа $n < 10^6$ мультипликативной стойкости 6.

3.4. Найдите все прототипичные числа $n < 10^6$ мультипликативной стойкости 7.

Существует предположение, что для каждого $m \geq 2$ существует наибольшее прототипичное число мультипликативной стойкости m.

Теперь слегка изменим определение функции f. А именно, зафиксируем натуральное число k и определим функцию f, сопоставляющую неотрицательному целому числу n произведение k-х степеней его цифр.

3.5. Найдите неподвижные точки этой функции при $k \geq 2$.

Ответ. Ясно, что числа 1, 11, 111, 1111, ... отображаются в 1. Все остальные числа после достаточного количества итераций дают 0.

Говорят, что **k-мультипликативная стойкость** = `k-multiplicative persistence` числа n равна m, если требуется m итераций этой функции f, чтобы получить из n число 1 или 0.

3.6. Задайте функцию, которая вычисляет k-мультипликативную стойкость числа n.

3.7. Для каждого m от 1 до 7 найдите наименьшее натуральное число, имеющее 2-мультипликативную стойкость m.

3.8. Для каждого m от 1 до 5 найдите наименьшее натуральное число, имеющее 3-мультипликативную стойкость m.

Аналогично определяется **аддитивная стойкость** числа n, но при этом вместо произведения цифр берется из сумма.

3.9. Найдите наименьшие числа аддитивной стойкости 1, 2, 3. А теперь *угадайте* нвименьшее число аддитивной стойкости 4.

§ 4. Устранимые простые числа

— The beaver's cecum, the part of the intestine that digests hard plant matter, is twenty times longer than the human cecum.
— Now that you know that, what do you do?
— I haven't the faintest idea. But it's one of the things I've learned during my travels, so I thought I'd pass it along.

Sophia Dembling, *Travel facts*

Простое число p называется усекаемым слева = `left-truncatable`[20], если вычеркивая в нем цифры по одной, начиная слева, мы каждый раз будем получать простые числа. Например, число 51620743 усекаемо слева, так как и оно само и получающиеся из него последовательным вычеркиванием цифр числа 1620743, 620743, 20743, 743, 43, 3 простые. Аналогично, простое число p называется усекаемым справа = `right-truncatable`, если вычеркивая в нем цифры по одной, начиная слева, мы каждый раз будем получать простые числа.

4.1. Найдите все усекаемые справа простые числа.

Указание. Что проще, выбирать среди простых чисел усекаемые справа или же дорисовывать к усекаемым справа простым числам цифры и проверять, что получившееся число снова простое? К тому же только второй подход может гарантировать, что мы нашли все такие числа.

Ответ. Имеется ровно 83 таких числа[21]. Вот они все:

[20] D.Wales, Prime numbers: the most mysterious figures of mathematics. — J.Wiley & Sons, Hoboken, N.J., 2005.

[21] I.O.Angell, H.J.Godwin, On truncatable primes. — Math. Comput., 1977, col.31, p.265–267.

2, 3, 5, 7, 23, 29, 31, 37, 53, 59, 71, 73, 79, 233, 239, 293, 311, 313, 317, 373, 379, 593, 599, 719, 733, 739, 797, 2333, 2339, 2393, 2399, 2939, 3119, 3137, 3733, 3739, 3793, 3797, 5939, 7193, 7331, 7333, 7393, 23333, 23339, 23399, 23993, 29399, 31193, 31379, 37337, 37339, 37397, 59393, 59399, 71933, 73331, 73939, 233993, 239933, 293999, 373379, 373393, 593933, 593993, 719333, 739391, 739393, 739397, 739399, 2339933, 2399333, 2939999, 3733799, 5939333, 7393913, 7393931, 7393933, 23399339, 29399999, 37337999, 59393339, 73939133

Обратите внимание, что среди цифр усекаемого справа простого числа 0 встречаться не может. Ситуация с усекаемыми слева простыми числами чуть сложнее. Легко видеть, что имеется бесконечно много усекаемых слева простых чисел, вторая цифра которых ноль.

4.2. Найдите все усекаемые слева простые числа, среди цифр которых не встречается 0. Укажите 8 самых больших из них.

Указание. Так как получающийся список довольно длинный, при рекуррентном определении сохраняйте список n-значных чисел на каждом шаге, например, при помощи конструкции `Remember`.

Ответ. Имеется ровно 4260 таких чисел[22,23]. Вот все такие числа < 1000:

2, 3, 5, 7, 13, 17, 23, 37, 43, 47, 53, 67, 73, 83, 97, 113, 137, 167, 173, 197, 223, 283, 313, 317, 337, 347, 353, 367, 373, 383, 397, 443, 467, 523, 547, 613, 617, 643, 647, 653, 673, 683, 743, 773, 797, 823, 853, 883, 937, 947, 953, 967, 983, 997

Самое большое усекаемое слева число, это 357686312646216567629137, в нем 24 цифры. Естественно, число 57686312646216567629137, получающееся из него вычеркиванием первой цифр, тоже усекаемое слева. Кроме того, имеется два новых 23-значных усекаемых слева числа, а именно, 95918918997653319693967 и 96686312646216567629137. Это дает нам три 22-значных усекаемых слева числа, а именно,

$$5918918997653319693967, \quad 6686312646216567629137, \quad 7686312646216567629137.$$

Кроме них имеется еще ровно одно такое число, а именно

$$9918918997653319693967.$$

Крис Колдуэл предложил называть простое число устранимым = `deletable`, если вычеркивая в нем цифры по одной, в *каком-то* порядке, мы будем каждый раз получать простое число. Например, число 12345769 устранимое, так как и оно само и получающиеся из него вычеркиванием цифр числа 1234769, 124769, 12479, 1279, 179, 79, 7 простые.

[22] S.Kahan, S.Weintraub, Left-truncatable primes. — J.Recr. Math., 1998, vol.29, p.254–264.

[23] P.De Geest, List of 4260 left-truncatable primes (without the zero digit), по адресу `http://www.ping.be/~ping6578/truncat.htm`.

4.3. Задайте критерий устранимости простого числа.

Решение. Зададим вначале функцию, возвращающую по целому числу список всех чисел, получающихся из него вычеркиванием одной цифры:

```
child[x_]:=Map[FromDigits[Delete[IntegerDigits[x],#]]&,
                    Range[Ceiling[Log[10,x]]]]
```

Ясно, что теперь искомый критерий можно определить в терминах

```
deletableQ[x_]:=PrimeQ[x]&&
             (x<10||Apply[Or,Map[deletableQ,child[x]]])
```

4.4. Задайте сертификат устранимости простого числа, т.е. функцию, которая сопоставляет ему какую-то цепочку простых чисел, каждое из которых получается вычеркиванием одной цифры предыдущего.

Решение. В терминах функций, определенных в предыдущей задачи, это можно сделать, например, так:

```
cert[x_]:=If[MemberQ[{2,3,5,7},x],{x},
        Prepend[cert[First[Select[child[x],deletableQ]]],x]]
```

4.5. Задайте функцию, которая сопоставляет устранимому числу *все* начинающиеся с него цепочки простых чисел, каждое из которых получается вычеркиванием одной цифры предыдущего.

4.6. Найдите все устранимые числа, получающиеся перестановкой цифр 1,2,3,4,5,6,7. Существуют ли устранимые числа, получающиеся перестановкой цифр 1,2,3,4,5,6,7,8?

4.7. Найдите устранимое число, состоящее из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,9.

§ 5. Разные разности — а также суммы, произведения и частные

> Первым делом он попытался выяснить все возможное о числе “66”. Пошарив по интернету, он узнал, что в Библии 66 книг, в мире есть 66 видов зубастых китов, самый большой метеорит на Земле, найденный в Намибии, весит 66 тонн, и 66 процентов австралийских аборигенов живут в городах. Подобная информация расширяла кругозор, но имела мало практической ценности.
>
> Кроме того, “66” приходилось родственником другому известному числу, “666”. Иного это напугало бы, но Степа гораздо сильнее опасался числа “661”, которое делилось на “43” без остатка.
>
> Виктор Пелевин, ДПП(NN)

Следующие задачи взяты из статьи[24], где можно найти много других подобных наблюдений.

5.1. Убедитесь, что $666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$.

5.2. Убедитесь, что $\phi(666) = 6 \cdot 6 \cdot 6$.

[24] E.Emanouilidis, Roulette and the beastly number. — J. Recreational Math., 1998, vol.29, p.246–247.

5.3. Убедитесь, что сумма чисел на колесе рулетки равна $1+2+\ldots+6\cdot 6 = 666$.

5.4. Найдите первое появление числа 666 среди цифр числа π.

5.5. Сколькими нулями заканчивается число 10^{666}!

Фейнман[25] заметил, что

$$1/243 = 0.004115226337448559\ldots$$

5.6. Продолжите этот паттерн и сравните с тем, что в действительности происходит. Объясните наблюдение Фейнмана. Опишите паттерн десятичного разложения $1/729$.

Ответ. Этот паттерн является следствием того, что $1/9 = 0.111\ldots$ и $1/81 = 0.0123456789\ldots$.

Как известно, компания `McDonald's` продает `Chicken McNuggets` в упаковках по 6, 9 и 20 штук[26]. Число называется **числом МакНаггета**, если возможно заказать такое число наггетов — иными словами, если его можно представить в виде суммы чисел 6, 9 и 20 с какими-то кратностями. Например, ясно, что 1,2,3,4,5,7,8,10,11 не являются числами МакНаггета.

5.7. Найдите *все* натуральные числа, которые не являются числами МакНаггета.

5.8. Напишите программу, которая для каждого числа МакНаггета возвращает какое-то его представление в виде суммы 6, 9 и 20.

> Американского президента звали Ronald Wilson Reagan. Каждое слово его имени содержало шесть букв, давая апокалипсическое[27] число зверя — “666”, о чем часто писал с тревогой журнал “Коммунист”.
>
> Виктор Пелевин, *Настольная книга оборотня*

---

[25] Feynman, Surely you are joking, Mr Feynman.

[26] Мы не рассматриваем вырожденный случай `Happy Meal`, где может встречаться коробочка с 4 наггетами.

[27] Вообще-то, апокалиптическое, но, как всегда, мы воспроизводим все особенности оригинала.

Глава 4. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ, REVISITED

The positive integers stand there, a continual and inevitable challenge to the curiosity of every healthy mind.

G.H.Hardy

The second law of small numbers: when two numbers look equal, it ain't necessarily so.

Richard Guy

Мирянину может показаться, что настоящая глава мало отличается по характеру от предыдущей. Это так и не так. Некоторые обсуждаемые здесь вопросы освящены столетиями традиции, и уже поэтому имеют не только развлекательный, но и исторический интерес. Другие упоминаемые здесь темы являются центральными в аналитической теории чисел и теории диофантовых уравнений. Это весьма специальные области, заметно отличающиеся по своему характеру от большинства других разделов математики, но несомненно это профессиональная математика большого стиля.

§ 1. Простые числа, revisited

The only thing we can be sure of is that we can't be sure of anything.

Richard Feynman, *The character of physical law*

It will be another million years, at least, before we understand the primes.

RPaul Erdös

В 1919 году Вигго Брун доказал, что в отличие от ряда $\sum \frac{1}{p}$, который расходится, хотя и очень медленно, ряд

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\ldots=1.90216058\ldots$$

состоящий из чисел, обратных к близнецам (обратите внимание, что близнецы, входящие в две пары, считаются дважды), сходится. Сумма этого ряда называется **константой Бруна**. Эта константа стала известна широким народным массам после того, как в 1994 году, пытаясь ее вычислить, Томас Найсли[28] обнаружил баг в первых Пентиумах, состоящий в том, что

[28] T.R.Nicely, Enumeration of 10^{14} of the twin primes and Brun's constant. — Virginia J. Sci., 1996, vol.46, N.3, p.195–204.

они давали сбой при делении с плавающей точкой[29]. А именно, вычисление $1/824633702441$ и $1/824633702443$ которое по идее должно было давать 19 правильных знаков, в действительности давало лишь 9 и приводило к ошибке уже в десятом — вот восторги приближенных вычислений! Интел потратил миллионы долларов на исправление этой ошибки. В 2004 году просуммировав начальный отрезок ряда, отвечающий простым $< 5 \cdot 10^{25}$ Найсли нашел приведенные выше девять значащих цифр константы Бруна.

1.1. Вычислите частичные суммы этого ряда, отвечающие близнецам p меньшим 10^n, при $n \leq 8$.

Двоюродные простые = `cousin primes` это простые, разность которых равна 4. Образуйте ряд

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \frac{1}{37} + \frac{1}{41} + \dots$$

состоящий из обратных к двоюродным простым. Обратите внимание, что пара $(3, 7)$ здесь опущена, так как 3 и 7 вместе с 5 образуют две пары близнецов.

1.2. Вычислите частичные суммы этого ряда, отвечающие двоюродным простым p меньшим 10^n, при $n \leq 8$.

Сексуальные простые = `sexy primes`[30] это простые, разность которых равна 6.

1.3. Вычислите частичные суммы ряда, состоящего из обратных к сексуальным простым p, не являющихся близнецами или двоюродными простыми, меньшим 10^n, при $n \leq 8$.

Вот еще одна забавная иллюстрация на тему маленьких чисел.

1.4. Числа 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331 простые. Верно ли, что все числа такого вида простые?

Ответ. Нет, следующее число $333333331 = 17 \cdot 19607843$.

Объяснение состоит в следующем: ни одно из чисел этой последовательности не делится на 2,3,5,7,11,13,37, поэтому они с большой вероятностью простые.

1.5. Найдите еще несколько простых чисел вида $33\dots331$.

Несколько первых знакопеременных сумм факториалов простые:

$3! - 2! + 1! = 5$,

$4! - 3! + 2! - 1! = 19$,

$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101$,

$6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619$,

$7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421$,

[29] B.Cipra, How number theory got the best of the Pentium chip. — Science, vol.265, p.175.

[30] Должно быть, от латинского `sex`.

$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899$.

1.6. Все ли члены этой последовательности простые?

Ответ. Нет,

$$9! - 8! + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 326981 = 79 \cdot 4139$$

Следующее число

$$10! - 9! + 8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 3301819$$

снова простое, но

$$11! - 10! + 9! - 8! + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 36614981 = 13 \cdot 2816537$$

снова составное. В действительности среди чисел такого вида еще всего ровно два простых[31], а именно

$$15!-14!+13!-12!+11!-10!+9!-8!+7!-6!+5!-4!+3!-2!+1! = 1226280710981,$$

$$\begin{aligned} 19! - 18! + 17! - 16! + 15! - 14! + 13! - 12! + 11! - 10! + 9! - 8! \\ + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 115578717622022981. \end{aligned}$$

Обратите внимание, что увеличенные на 2 сумма *четного* количества первых простых чисел простая: $2 + 3 + 2 = 7$, $2 + 3 + 5 + 7 + 2 = 19$, $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 2 = 43$, $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 2 = 79$.

1.7. Всегда ли увеличенная на 2 сумма первых $2n$ простых является простым числом?

Ответ. Нет, увеличенная на 2 сумма первых 22 простых чисел составная:

$$2 + 3 + \ldots + 79 + 2 = 793 = 13 \cdot 61.$$

Для генерации простых Франк Бусс определил следующую функцию:

$$\begin{aligned} f(1) = 1, \quad B(n) = (\text{Простое, следующее за } f(n) + 1) - f(n), \\ f(n) = f(n-1)B(n-1) \end{aligned}$$

1.8. Используя функцию “следующее простое”, задайте функцию Бусса, вычислите ее значения и убедитесь, что все они простые.

Композиториал числа n определяется также, как его примориал $n\#$, но теперь берется произведение не простых, а составных чисел, меньших n.

[31] Paulo Ribenboim, Galimatias Arithmeticae.

Иными словами, композиториал равен $n!/n\#$. По аналогии с факториальными и примориальными мы можем теперь рассмотреть композиториальные простые.

1.9. Найдите простые $n!/n\# + 1$ при $n \leq 40$

1.10. Найдите простые $n!/n\# - 1$ при $n \leq 40$

Последовательность Сильвестра определяется начальным условием $e_1 = 2$ и рекуррентным соотношением

$$e_n = e_1 e_2 \dots e_{n-1} + 1 = e_{n-1}^2 - e_{n-1} + 1.$$

Это последовательность такого же типа, как та, которая возникает в доказательстве теоремы Эвклида, где используется то же рекуррентное соотношение, но на каждом шаге берется не само число e_n, а какой-то его простой делитель.

1.11. напишите рекуррентную программу вычисления чисел e_n, вычислите несколько сотен значений. Делятся ли какие-то из них на квадрат простого числа? Сколько среди них простых?

1.12. К чему стремится сумма $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}$ при $i \longrightarrow \infty$?

Совершенно поразительным образом, существует константа E такая, что

$$e_n = \left\lfloor E^{2n+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

$E = 1.264084735306\dots$ — Варди, Грехем—Кнут—Паташник.

§ 2. Сильный закон маленьких чисел

Capricious coincidences cause careless conjectures.
Richard Guy

Early exceptions eclipse eventual essentials.
Richard Guy

Все числа, с которыми мы считаем — в том числе, конечно и на компьютере! — слишком малы для обнаружения многих подлинных закономерностей. Мы не знаем, как устроены действительно большие натуральные числа. Это явление, известное как **сильный закон маленьких чисел**, детально обсуждается в статьях[32,33,34,35], и мы приведем оттуда несколько замечательных примеров.

---

[32] R.K.Guy, The strong law of small numbers. — Amer. Math. Monthly, 1988, vol.95, N.8, p.697–712.

[33] R.K.Guy, Graphs and the strong law of small numbers. — Proc. 6 Intern. Conf Theory Appl. Graphs, Kalamazoo, MI, 1988.

[34] R.K.Guy, The second strong law of small numbers. — Math. Magazine, 1990, vol.63, N.1, p.3–20.

[35] D.T.Haimo, Experimentation and conjecture are not enough. — Amer. Math. Monthly, 1995, vol.102, N.2, p.102–112.

Вот классический пример. Эйлер в 1772 году заметил, что 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, ... где разности между двумя последовательными членами являются последовательными четными числами, дает 40 последовательных простых.

2.1. Убедитесь в этом. Верно ли, что все значения этой последовательности простые?

Решение. Речь идет о значениях многочлена $f = x^2 - x + 41$. Ясно, что 41-й член последовательности равен $f(41) = 1681 = 41^2$.

В 1798 Лежандр заметил, что многочлен $f = x^2+x+41$ тоже дает первые 40 простых — и много потом!

2.2. Проверьте утверждение Лежандра.

Причина того, что этот многочлен дает так много последовательных простых значений состоит, конечно, снова в магическом числе 163, а именно,

$$x^2 + x + 41 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{163}{4}.$$

В 1752 году Гольдбах доказал, что не существует многочлена с целыми коэффициентами, который принимает простые значения во всех целых точках.

2.3. Проверьте, что многочлен $36n^2-810n+2753$ принимает целые значения во всех целых точках $n = 0, 1, \ldots, 44$.

2.4. Проверьте, что многочлен $47n^2 - 1701n + 10181$ принимает целые значения во всех целых точках $n = 0, 1, \ldots, 42$.

Вот совсем простой пример (пример 35 Гая), который, конечно, не может ввести в заблуждение математика. Рассмотрим многочлен

$$f = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24).$$

Подстановка в этот многочлен нескольких первых натуральных чисел с большим успехом дает последовательные степени 2:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = 8, \quad f(5) = 16.$$

2.5. Верно ли, что этот многочлен всегда дает в натуральных точках последовательные степени двойки?

Решение. Это, разумеется, *не может* быть правдой, так как 2^n растет быстрее, чем любой многочлен! В действительности, многочлен f как раз и является интерполяционным многочленом, определенным значениями в точках 1,2,3,4,5. Так как степень этого многочлена 4, а точек 5, было бы весьма удивительно, если бы он давал правильное значение еще хотя бы в одной точке! И в самом деле, $f(6) = 31$.

Следующий пример (пример 41 Гая) уже чуть тоньше, так как здесь нельзя сослаться просто на порядок роста. Легко видеть, что $\lceil e^{(n-2)/2}\rceil$ дает при $n = 1, 2, \ldots, 9$ числа Фибоначчи: 1,2,3,5,8,13,21,34,55.

2.6. Верно ли, что $\lceil e^{(n-2)/2}\rceil = F_n$?

Решение. Подобное предположение сразу опровергается гносеологическим аргументом: если бы такая формула имела место, она, несомненно, была бы [нам] известна. И действительно, уже при $n = 10$ левая часть равна 91, в то время как $F_{10} = 89$.

В 1919 году Дьердь Пойа высказал следующее предположение, известное как **гипотеза Пойи**: количество чисел $\leq n$ с нечетным количеством простых делителей не меньше количества чисел $\leq n$ с четным количеством простых делителей.

2.7. Проверьте гипотезу Пойи для всех чисел $< 10^8$. Следует ли отсюда, что она верна?

Ответ. Все числа в указанном диапазоне действительно обладают этим свойством. В течение 40 лет гипотеза Пойи считалась в высшей степени правдоподобной, пока в 1958 году не было доказано, что она неверна для бесконечного количества n. А в 1980 году М.Танака показал, что минимальный контрпример к гипотезе Пойа равен $n = 906150257$.

2.8. Верно ли, что $21 \cdot 2^n - 1$ и $7 \cdot 4^n + 1$ либо оба одновременно простые, либо оба одновременно составные?

Ответ. Для $n \leq 17$, а это максимум того, что можно сделать от руки, это действительно так. Эти числа простые для $n = 1, 2, 3, 7, 10, 13$ и составные для всех остальных значений. Но для $n = 18$ число $21 \cdot 2^{18} - 1 = 5505023$ простое, а число

$$7 \cdot 4^{18} + 1 = 481036337153 = 166609 \cdot 2887217$$

составное.

§ 3. Полисовершенные числа

В выпуске 1 мы рассматривали совершенные числа, равные сумме своих собственных делителей. Иными словами, число n в том и только том случае совершенно, когда $\sigma(n) = 2n$, где $\sigma(n) =$ `DivisorSigma`, сумма *всех* делителей числа n. Число n называется **полисовершенным**, или точнее **m-совершенным**, если $\sigma(n) = mn$. Таким образом, совершенные числа, это в точности 2-совершенные числа.

В параграфе о совершенных числах нам уже встречались два 3-совершенных числа, а именно, открытое в 1557 году Робертом Рекордом число $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ и открытое в 1637 году Пьером де Ферма число $672 = 2^5 \cdot 5 \cdot 7$.

3.1. В 1638–1643 годах Жюмо, Декарт, Мерсенн и Ферма без использования компьютеров открыли еще четыре 3-совершенных числа. Найдите хотя бы одно из них!

Ответ. Единственное, которое можно найти при помощи встроенной функции `DivisorSigma` меньше, чем за минуту, это открытое в 1938 году число Жюмо

$523776 = 2^9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$

Дойти полным перебором до чисел Декарта (1638), Мерсенна (1639) и Ферма (1643) у Вас, скорее всего, не хватит терпения:

$1476304896 = 2^{13} \cdot 3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 127,$

$459818240 = 2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73,$

$51001180160 = 2^{14} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151.$

3.2. В 1638 Декарт без использования компьютеров открыл шесть 4-совершенных чисел. Найдите хотя бы два из них!

Ответ. Два из них совсем маленькие, вот они:

$30240 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7,$

$32760 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13.$

Возможно прямым перебором минут за пять Вам удастся найти еще одно, а именно,

$2178540 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19$

§ 4. Радикал и гипотеза *abc*.

> This is very characteristic in the history of mathematics. When there is something that is really puzzling and cannot be understood, it usually deserves the closest attention because some time or other some big theory will emerge from it.
>
> Andre Weil[36]

Произведение всех *различных* простых множителей числа n называется **радикалом** n и обозначается $r(n)$. Ясно, что $r(n) = n$ в том и только том случае, когда число n бесквадратное. Чем больше у числа n повторяющихся простых множителей, и чем они более маленькие, тем меньше отношение $r(n)/n$.

4.1. Задайте функцию r.

Пусть теперь a и b — два взаимно простых числа, $c = a + b$. Рассмотрим отношение $r(abc)/c$.

4.2. Существуют ли взаимно простые числа a и b, для которых $r(abc)/c < 0.01$?

Гипотеза abc утверждает, что это едва возможно. А именно, для любого $q > 1$, отношение $r(abc)^q/c$ отделено от 0.

Удивительным образом, из этой гипотезы вытекали бы совершенно невероятные следствия.

---

[36] A.Weil, Two lectures on number theory, past and present. — Enseign. Math., 1974, vol.20, p.87–110.

• Последняя теорема Ферма.

• Существует бесконечно много простых Вифериха.

• Уравнение Брокара $n! + 1 = m^2$ имеет лишь конечное число решений.

• Каждый из многочленов $(x^n - 1)/(x - 1)$ принимает бесконечное количество бесквадратных значений.

• Существует лишь конечное число троек последовательных `powerful numbers`.

• Уравнение Била не имеет решений, при достаточно больших показателях степени.

§ 5. Уравнения в натуральных числах

> Some branches of mathematics have the pleasant characteristic that what seems plausible at first sight is generally true. In number theory anyone can make plausible conjectures, and they are almost invariably false.
>
> G.H.Hardy

5.1. Найдите хотя бы одно решение уравнения

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^m = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n,$$

где оба числа p и q простые, а $m, n \geq 2$. Найдите еще одно решение, в котором q не является простым.

Ответ. Единственное известное решение этого уравнения в простых числах, это

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 5 + 5^2 = 31.$$

Знаменитая **гипотеза Бейтмена** утверждает, что никаких других решений в простых числах нет. Если отказаться от условия простоты, появляются и другие решения, например,

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{12} = 1 + 90 + 90^2 = 8191.$$

Следующая задача, известная как **гипотеза Била**[37] является очень широким обобщением теоремы Ферма. Пусть $l, m, n \geq 3$, докажите, что если (x, y, z) — решение уравнение $x^l + y^m = z^n$, в натуральных числах, то у x, y, z есть общий множитель. Ясно, что теорема Ферма сразу вытекает отсюда, так как при $l = m = n$ сокращая решение (x, y, z) на общий множитель мы снова получаем решение того же уравнения. Это обобщение было сформулировано Техасским миллионером Эндрю Билом (Beal) в 1997 году, вместе с денежной премией \$5000, которая каждый год увеличивалась еще на \$5000. В настоящее время эта премия составляет \$100000 за доказательство, опубликованное в реферируемом математическом журнале, или

[37] `www.bealconjecture.com`

контрпример. Ясно, что ограничение $l, m, n \geq 3$ здесь существенно, так как если среди l, m, n есть равные 2, то уравнение $x^l + y^m = z^n$ может иметь много решений.

5.2. Найдите наименьшее решение уравнения $x^3 + y^4 = z^5$.

Ответ. Это $(256, 64, 32)$, в самом деле, $256^3 + 64^4 = 32^5 = 33554432$.

5.3. А теперь поймите механизм этого решения и постройте бесконечно много решений уравнений $x^l + y^m = z^n$.

5.4. Найдите все решения уравнения $m! + 1 = n^2$ в натуральных числах с $m < 1000$.

Ответ. Единственные такие решения, это те решения, которые мы уже видели в связи с примориальными простыми, получающиеся при $m = 4, 5, 7$. Сформулированная в 1904 году **гипотеза Брокара** утверждает, что никаких других решений это уравнение не имеет.

5.5. Существует ли параллелепипед, у которого длины всех сторон и всех диагоналей целые?

Указание. Спрашивается, имеет ли система

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = d^2 \\ a^2 + c^2 = e^2 \\ b^2 + c^2 = f^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = g^2 \end{cases}$$

решения в натуральных числах.

Ответ. Вам не удалось найти решений? Правильно! Такие решения неизвестны.

Следующее уравнение рассматривал Рамануджан.

5.6. Найдите все решения уравнения $2^n - 7 = x^2$ в целых числах < 10000.

Ответ. Решения 3,4,5,7,15 видны и без компьютера. Никаких других решений нет.

5.7. Найдите наименьшие решения сравнения $2^n \equiv k \pmod{n}$ для $k = 2, \ldots, 9$.

Ответ. Ограничимся ответом для $k = 3$. Единственными известными решениями сравнения $2^n \equiv 3 \pmod{n}$ являются $n = 4700063497$ и еще одно, грандиозное[38].

5.8. Проблема Валлиса: найдите примитивные решения уравнения

$$\sigma(x^2) = \sigma(y^2),$$

где σ — сумма делителей, кроме $(4, 5)$.

[38] P.-L.Montgomery, New solution to $2^n \equiv 3 \pmod{n}$. `NMBRTHRY@listserv.nodak.edu`, 24 June 1999

Напомним, что примитивное решение — это решение, не являющееся кратным другого решения. Например, вместе с $(4,5)$ решениями являются также $(12,15)$, $(21,35)$, etc.

5.9. Найдите те кратные $(4,5)$, которые являются решениями.

Легко видеть, что уравнение $\phi(n)=\phi(n+1)$ имеет довольно много решений, притом в совсем маленьких числах. Например, $\phi(1)=\phi(2)=1$, $\phi(3)=\phi(4)=2$, $\phi(15)=\phi(16)=8$, и т.д.

5.10. Найдите все решения уравнения $\phi(n)=\phi(n+1)$ такие, что $n<10^5$.

5.11. Имеет ли уравнение $\phi(n)=\phi(n+1)=\phi(n+2)$ решения?

Ответ. Да, но до 10^5 такое решение ровно одно

$$\phi(5186)=\phi(5187)=\phi(5188)=2^5 3^4.$$

§ 6. Уравнение Эйлера

Уравнение Эйлера $u^3+v^3+w^3=z^3$ имеет много решений, в том числе совсем маленькие, такие как

$$3^3+4^3+5^3=216=6^3. \quad 1^3+6^3+8^3=729=9^3, \quad 6^3+8^3+10^3=1728=12^3.$$

Гораздо интереснее искать решения этого уравнения с одним и тем же z, но разными u,v,w.

6.1. Найдите наименьший куб, который представляется как сумма трех кубов натуральных чисел двумя существенно различными способами.

Ответ. Он совсем рядом:

$$2^3+12^3+16^3=9^3+12^3+15^3=5832=18^3.$$

А вот еще три, для которых $z^3\le 100000$:

$$4^3+24^3+32^3=18^3+24^3+30^3=46656=36^2,$$
$$2^3+17^3+40^3=6^3+32^3+33^3=68921=41^3,$$
$$3^3+36^3+37^3=27^3+30^3+37^3=97336=46^3.$$

6.2. Найдите наименьший куб, который представляется как сумма трех кубов натуральных чисел *тремя* существенно различными способами.

Ответ. Он тоже недалеко

$$6^3+36^3+48^3=12^3+19^3+53^3=27^3+36^3+45^3=157464=54^3.$$

Приведем все такие случаи — кроме упомянутых в следующей задаче! — в которых все $u,v,w,z\le 100$:

$$8^3+48^3+64^3=34^3+39^3+65^3=36^3+48^3+60^3=373248=72^3,$$
$$4^3+34^3+80^3=12^3+64^3+66^3=19^3+60^3+69^3=551368=82^3,$$
$$28^3+53^3+75^3=42^3+56^3+70^3=54^3+57^3+63^3=592704=84^3,$$
$$21^3+43^3+84^3=25^3+31^3+86^3=32^3+46^3+82^3=681472=88^3.$$

6.3. Найдите наименьший куб, который представляется как сумма трех кубов натуральных чисел *четырьмя* существенно различными способами.

Ответ. Это

$$20^3+54^3+79^3=26^3+55^3+78^3=33^3+45^3+81^3=38^3+48^3+79^3= 658503=87^3.$$

В числах ≤ 100 имеется еще ровно одно решение, а именно,

$$10^3+60^3+80^3=25^3+38^3+87^3=45^3+60^3+75^3=58^3+59^3+69^3= 729000=90^3.$$

§ 7. Проблема Пруэ—Тэрри—Эскотта

В выпуске 1 мы уже обсуждали совместное решение двух уравнений вида

$$\begin{gathered} x_1^l+x_2^l+x_3^l+x_4^l=y_1^l+y_2^l+y_3^l+y_4^l, \\ x_1^m+x_2^m+x_3^m+x_4^m=y_1^m+y_2^m+y_3^m+y_4^m. \end{gathered}$$

В действительности аналогичные задачу можно ставить не для двух, а для большего числа степеней. Предельным случаем этой задачи является **проблема Пруэ—Тэрри—Эскотта**[39,40], которая как раз и спрашивает, имеет ли система уравнений

$$x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k=y_1^k+y_2^k+\ldots+y_n^k, \qquad k=1,\ldots,m,$$

нетривиальные решения. Особенно труден случай, когда $n=m+1$.

Самое поразительное, что еще в 1940-е годы, без всяких там компьютеров, Летак нашел решение этой системы при $n=10$, притом *симметричное*, т.е. такое, что $x_i=-x_{n-i}$ и $y_i=-y_{n-i}$. Ясно, что для симметричного решения сумма нечетных степеней равна 0, так что достаточно сравнивать четные степени. Приведем это решение[41]:

$$\begin{aligned} &(-23750)^k+(-20667)^k+(-20499)^k+(-11857)^k+(-436)^k+ \\ &\quad (436)^k+(11857)^k+(20499)^k+(20667)^k+(23750)^k= \\ &(-23738)^k+(-20855)^k+(-20231)^k+(-11881)^k+(-12)^k+ \\ &\quad (12)^k+(11881)^k+(20231)^k+(20855)^k+(23738)^k. \end{aligned}$$

7.1. Проверьте, что это действительно решение при $n=10$.

---

[39] R.M.Wright, Prouhet 1851 solution of the Tarry—Escott problem of 1910. — Amer. Math. Monthly, 1959, vol.102, p.199–210.

[40] P.B.Borwein, C.Ingalls, The Prouhet—Tarry—Escott problem revisited. — Enseign. Math., 1994, vol.40, p.3–7.

[41] В энциклопедии Вайсстайна оно, как водится, воспроизведено с двумя опечатками: вместо -20449 напечатано -20499, а вместо -20885 напечатано -20855.

Лишь в 2000 году были найдены меньшие решения, притом совсем маленькие:

$$\begin{aligned}(-313)^k + (-301)^k + (-188)^k + (-100)^k + (-99)^k +\\ (99)^k + (100)^k + (188)^k + (301)^k + (313)^k =\\ (-308)^k + (-307)^k + (-180)^k + (-131)^k + (-71)^k +\\ (71)^k + (131)^k + (180)^k + (307)^k + (308)^k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-515)^k + (-452)^k + (-366)^k + (-189)^k + (-103)^k +\\ (103)^k + (189)^k + (366)^k + (452)^k + (515)^k =\\ (-508)^k + (-417)^k + (-331)^k + (-245)^k + (-18)^k +\\ (18)^k + (245)^k + (331)^k + (417)^k + (508)^k.\end{aligned}$$

7.2. Проверьте, что это действительно решения при $n = 10$.

Лишь в 1999 году Чен нашел первое нетривиальное решение при $n = 12$:

$$0^k + 11^k + 24^k + 65^k + 90^k + 129^k + 173^k + 212^k + 237^k + 278^k + 291^k + 302^k =$$
$$3^k + 5^k + 30^k + 57^k + 104^k + 116^k + 186^k + 198^k + 245^k + 272^k + 297^k + 299^k.$$

7.3. Проверьте, что это действительно решение при $n = 12$.

Глава 5. КОМБИНАТОРИКА, REVISITED

Если взять сто грамм аэрозоли
Что от тараканов и клопов
И прибавить жидкость для мозолей
Капнуть капли две “Шанель” духов
Влить туда резинового клея
И добавить лака для ногтей
С этого и грузчики балдеют.
Я же только вижу в темноте.

Александр Дольский, *Я вообще на ощупь очень нервный*

В настоящей главе мы обсуждаем дальнейшие свойства уже встречавшихся нам классических комбинаторных коэффициентов и последовательностей таких, как биномиальные коэффициенты и числа Фибоначчи. Кроме того, мы вводим некоторые их классические варианты или аналоги такие, как числа Люка или числа Деланнуа.

§ 1. Дополнительные задачи о биномиальных коэффициентах

Вначале мы сформулируем несколько простых задач об обычных биномиальных коэффициентах, а потом рассмотри некоторые их обобщения.

1.1. Найдите решения уравнения $2\dbinom{n}{m} = \dbinom{n}{m+1} \neq 0$.

Назовем нечетное число n **сбалансированным** относительно простого числа p, если среди ненулевых биномиальных коэффициентов $\binom{n}{m}$, $0 \leq m \leq n$, одинаковое количество квадратичных вычетов и невычетов по модулю p.

1.2. Найдите все простые числа < 1000, для которых не существует ни одного сбалансированного числа n, $1 \leq n \leq p-1$.

Эрдеш задался вопросом, может ли биномиальный коэффициент $\dbinom{n}{k}$ при $2 \leq k \leq n-2$ быть степенью некоторого натурального числа. При $k = 2$ уравнение $\dbinom{n}{2} = m^l$ имеет бесконечно много решений.

1.3. Найдите четыре первых решения уравнения $\dbinom{n}{2} = m^2$

Ответ. Вот они:

$$\binom{9}{2} = 6^2, \qquad \binom{50}{2} = 35^2, \qquad \binom{289}{2} = 204^2, \qquad \binom{1682}{2} = 1189^2.$$

1.4. Докажите, что уравнение $\binom{n}{2} = m^2$ имеет бесконечно много решений.

Ответ. В самом деле, если $\binom{n}{2}$ квадрат, то $\binom{(n-1)^2}{2}$ тоже квадрат.

1.5. Уравнение $\binom{n}{3} = m^2$ имеет единственное решение с $n \geq 6$. Найдите его.

Ответ. $\binom{50}{3} = 140^2$.

1.6. Попытайтесь найти хотя бы одно решение уравнения $\binom{n}{k} = m^l$ в натуральных числах $4 \leq k \leq n-4$, $l \geq 2$.

Ответ. Это Вам вряд ли удастся. Теорема Эрдеша, см. [АЦ], Гл. 3, утверждает, что таких решений не существует.

Триномиальный коэффициент $\binom{n}{m}_2$ это коэффициент при x^{n+m} в разложении многочлена $(1+x+x^2)^n$ по степеням x.

1.7. Убедитесь, что $\binom{n}{-m}_2 = \binom{n}{m}_2$.

1.8. Убедитесь, что $\binom{n}{m}_2$ можно определить следующим образом:

$$(x^{-1}+1+x)^n = \sum_{m=-n}^{n} \binom{n}{m}_2 x^m.$$

1.9. Докажите, что триномиальные коэффициенты удовлетворяют следующему треугольному рекуррентному соотношению:

$$\binom{n}{m}_2 = \binom{n-1}{m-1}_2 + \binom{n-1}{m}_2 + \binom{n-1}{m+1}_2.$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1
\end{array}$$

Каждый элемент здесь является суммой трех элементов над ним.

1.10. Напишите программу для вычисления триномиальных коэффициентов

Изобразим начало **треугольника Каталана**:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 2 \\
1 & 3 & 5 & 5 \\
1 & 4 & 9 & 14 & 14 \\
1 & 5 & 14 & 28 & 42 & 42 \\
1 & 6 & 20 & 48 & 90 & 132 & 132 \\
1 & 7 & 27 & 75 & 165 & 297 & 429 & 429 \\
1 & 8 & 35 & 110 & 275 & 572 & 1001 & 1430 & 1430
\end{array}
$$

Иными словами, первый столбец этого треугольника состоит из единиц и каждый элемент равен сумме элементов стоящих над ним и слева от него — или, что то же самое, он равен сумме всех элементов стоящих над ним и левее него в предыдущей строке. Последний элемент n-й строки равен n-му числу Каталана.

1.11. Напишите рекуррентную программу, вычисляющую треугольник Каталана.

Изобразим начало **гармонического треугольника Лейбница**:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \frac{1}{1} \\
 & & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \\
 & & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} \\
 & & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} \\
 & & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} \\
 & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} \\
 & \frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} \\
\frac{1}{8} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{8}
\end{array}
$$

Иными словами, в этом треугольнике нумерация строк начинается с 1, первое и последнее числа в n-й строке равны $1/n$, и, в отличие от треугольника Паскаля, в котором каждое число равнялось сумме двух стоящих нам ним, здесь каждое число равно сумме двух стоящих *под* ним.

1.12. Напишите рекуррентную программу, вычисляющую гармонический треугольник Лейбница.

1.13. Проверьте **сравнение Тушара** для чисел Белла

$$B_{n+p} \equiv B_n + B_{n+1} \pmod p,$$

где p простое.

§ 2. Числа Деланнуа

Еще одним важнейшим аналогом биномиальных коэффициентов являются **числа Деланнуа** = `Delannoy numbers` $D(n,m)$, которые определяются начальным условием $D(0,0)=1$ и рекуррентным соотношением

$$D(n,m) = D(n-1,m) + D(n,m-1) + D(n-1,m-1).$$

Если биномиальный коэффициент $\binom{n+m}{m}$ истолковывается как количество путей из точки $(0,0)$ в точку (n,m), в которых разрешены шаги вправо $(i,j) \longrightarrow (i+1,j)$ и вверх $(i,j) \longrightarrow (i,j+1)$, то в путях, количество которых выражают числа Деланнуа разрешены еще диагональные шаги вправо-вверх $(i,j) \longrightarrow (i+1,j+1)$. Иными словами, $D(n+m,m)$ это количество путей, которыми король может дойти из левого нижнего угла в правый верхний угол на шахматной доске размера $(n+1)\times(m+1)$, если он на каждом шаге приближается к цели.

2.1. Напишите рекуррентную программу для вычисления чисел Деланнуа и вычислите $D(n,m)$, $0 \le m \le n \le 10$.

2.2. Убедитесь, что $D(n,n) = P_n(3)$, где P_n есть n-й многочлен Лежандра.

2.3. Убедитесь, что

$$D(n,n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}\binom{n+m}{m}.$$

2.4. Убедитесь, что производящая функция для числе Деланнуа равна

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} D(n,m)x^n y^m = \frac{1}{1-x-y-xy}.$$

Указание. Разложите $(1-x-y-xy)^{-1}$ в ряд.

Числа Шредера[42] находятся в таком же отнощении к числам Деланнуа, как числа Каталана к биномиальным коэффициентам. А именно, **числа Шредера** S_n определяются начальным условием $S_0 = 1$ и рекуррентным соотношением

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} S_0 S_{n-i-1}.$$

[42] E.Schröder, Vier kombinatorische Probleme. — Z. Math. Phys., 1870, Bd.15, S.361–376.

Таким образом, число Шредера описывает количество путей кородя из левого нижнего угла в правый верхний угол шахматной доски размера $(n+1)\times(n+1)$, в которых король никогда не поднимается *выше* главной диагонали.

2.5. Напишите рекуррентную программу для вычисления чисел Шредера и вычислите S_n, $0\le n\le 10$.

С числами Шредера тесно связаны также **числа Моцкина**[43] M_n, которые определяются начальным условием $M_0=1$ и рекуррентным соотношением

$$M_n = M_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} M_0 M_{n-i-2}.$$

Таким образом, число Моцкина M_n описывает количество путей из точки $(0,0)$ в точку $(0,n)$, разрешенными шагами которых являются шаги вправо-вверх $(i,j)\longrightarrow(i+1,j+1)$, вправо $(i,j)\longrightarrow(i+1,j)$ и вправо-вниз $(i,j)\longrightarrow(i+1,j-1)$.

2.6. Напишите рекуррентную программу для вычисления чисел Моцкина и вычислите M_n, $0\le n\le 10$.

§ 3. Числа Люка

Важнейшим аналогом чисел Фибоначчи являются **числа Люка**, L_n, которые определяется тем же рекуррентным соотношением $L_n=L_{n-1}+L_{n-2}$, но начальные условия теперь такие: $L_1=1$, $L_2=3$.

3.1. Напишите рекуррентную процедуру, вычисляющую числа Люка. Вычислите первые несколько сотен чисел Люка.

Ответ. Ограничимся началом ответа:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127, 24476, 39603, 64079, 103682, 167761, ...

Большинство следующих задач хорошо известны, например [Ho], [Va].

3.2. Проверьте, что для чисел Люка выполняется следующий аналог формулы Бине, связывающий их с золотым сечением:

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n.$$

3.3. Убедитесь, что

$$L_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\right],$$

где через $[x]$ обозначена функция `Nint` = `Round`, сопоставляющая вещественному числу ближайшее целое — или ближайшее *четное* целое, in case of doubt.

---

[43] T.Motzkin, Relations between hypersurface cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent correspondence, and for nonassociative products. — Bull. Amer. Math. Soc., 1948, vol.54, p.352–360.

3.4. Найдите рекуррентное соотношение, выражающее число Люка L_n через *одно* предыдущее L_{n-1}.

Ответ. В свете предыдущих задач, например, так

$$L_n = \left\lfloor \frac{L_{n-1}(1+\sqrt{5})+1}{2} \right\rfloor.$$

3.5. Вычислите $L_n^2 - L_{n+1}L_{n-1}$.

3.6. Докажите, что числа Люка удовлетворяют следующей формуле сложения

$$L_{m+n} = \frac{L_m L_n + 5F_m F_n}{2},$$

где, как обычно, F_n обозначает числа Фибоначчи.

Из формулы Бине следует, что числа Люка растут примерно в $\sqrt{5}$ раз быстрее, чем числа Фибоначчи. Следующие задачи придают этому точный смысл.

3.7. Вычислите $L_n^2 - 5F_n^2$.

3.8. Докажите, что $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$.

3.9. Докажите, что $F_m L_n = F_{m+n} + (-1)^n F_{m-n}$.

3.10. Когда L_n делит L_m?

3.11. Когда L_n делит F_m?

3.12. Найдите первые 20 простых чисел Люка.

3.13. Убедитесь, что

$$L_{n+1} = \begin{vmatrix} 3 & i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ i & 1 & i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & i & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & i & 1 \end{vmatrix},$$

где порядок определителя справа равен n, а i, естественно, мнимая единица.

Следующая красивая характеризация чисел Люка содержится в статье[44].

3.14. Убедитесь, что число Люка L_n равно количеству подмножеств в $\{1, 2, \dots, n\}$, не содержащих последовательных элементов (числа n и 1 считаются последовательными).

---

[44] R.Honsberger, A second look at the Fibonacci and Lucas numbers. — Mathematical Gems. III, Math. Ass. Amer., Washington, D.C., 1985, Ch.8.

§ 4. Семья Фибоначчи

4.1. Проверьте **тождество Желина—Чезаро** для чисел Фибоначчи

$$F_n^4 - F_{n-2}F_{n-1}F_{n+1}F_{n+2} = 1$$

Числа Трибоначчи определяются начальными условиями $T_1 = T_2 = 1$, $T_2 = 2$ и рекуррентным соотношением

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}.$$

4.2. Напишите рекуррентную процедуру, вычисляющую числа Трибоначчи. Вычислите первые несколько сотен чисел Трибоначчи.

Указание. `Remember`!

Ответ. Ограничимся первыми тридцатью из них:

1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927, 1705, 3136, 5768, 10609, 19513, 35890, 66012, 121415, 223317, 410744, 755476, 1389537, 2555757, 4700770, 8646064, 15902591, 29249425.

4.3. Оцените предел отношения T_n/T_{n-1} при $n \longrightarrow \infty$.

Ответ. Это вещественный корень $\neq 1$ уравнения $x^4 - 2x^3 + 1 = 0$, приближенно равный $1.8392867552141611326\ldots$

Числа Тетраначчи определяются начальными условиями $T_0 = 0$, $T_1 = T_2 = 1$, $T_2 = 2$ и рекуррентным соотношением

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} + T_{n-4}.$$

4.4. Напишите рекуррентную процедуру, вычисляющую числа Тетраначчи. Вычислите первые несколько сотен чисел Тетраначчи.

Ответ. Вот первые 31 из них:

0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, 401, 773, 1490, 2872, 5536, 10671, 20569, 39648, 76424, 147312, 283953, 547337, 1055026, 2033628, 3919944, 7555935, 14564533, 28074040, 54114452, 104308960.

4.5. Оцените предел отношения T_n/T_{n-1} при $n \longrightarrow \infty$.

Ответ. Это *положительный* вещественный корень $\neq 1$ уравнения $x^5 - 2x^4 + 1 = 0$, приближенно равный $1.9275619754829253043\ldots$

В 1899 году Перрен рассмотрел следующую **последовательность Перрена**, которая определяется начальными условиями $P_0 = 3$, $P_1 = 0$, $P_2 = 2$ и рекуррентным соотношением $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$.

4.6. Напишите рекуррентный алгоритм вычисления последовательности Перрена и вычислите несколько десятков значений.

4.7. Проверьте, что простое числа p делит P_p.

Составное число n называется **псевдопростым Перрена**, если оно делит P_n.

4.8. Удастся ли Вам найти хотя бы одно псевдопростое Перрена?

Ответ. Тест Перрена очень сильный, но, тем не менее, такие псевдопростые существуют. Скажем[45], 271441, хотя вряд ли у Вас хватит терпения зайти так далеко.

4.9. Решите это рекуррентное соотношение и найдите явную формулу для членов последовательности Перрена.

Ответ. Вычисление показывает, что $P_n = a^n + b^n + c^n$, где a, b, c — корни уравнения $x^3 - x - 1 = 0$.

Последовательность Падована = Padovan sequence определяется как последовательность целых, определенная начальными условиями $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ и рекуррентным соотношением $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}$.

4.10. Напишите рекуррентный алгоритм вычисления последовательности Падована и вычислите несколько десятков значений.

4.11. Решите это рекуррентное соотношение и найдите явную формулу для членов последовательности Падована.

Ответ. Вычисление показывает, что

$$P_n = \frac{1+a}{a^{n+2}(2+3a)} + \frac{1+b}{b^{n+2}(2+3b)} + \frac{1+c}{c^{n+2}(2+3c)},$$

где a, b, c — корни уравнения $x^3 + x - 1 = 0$.

Вот еще два похожих семейства чисел, описанных в[46] **Числа Якобсталя** J_n задаются начальными условиями $J_0 = 0$ и $J_1 = 1$ и рекуррентным соотношением $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$.

4.12. Напишите рекуррентную программу, вычисляющую числа Якобсталя, и найдите первые 100 из них.

Числа Люка—Якобсталя j_n удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$, что и числа Якобсталя, но отличаются начальным условием. А именно, для них $j_0 = 2$ и $J_1 = 1$ и

4.13. Напишите рекуррентную программу, вычисляющую числа Люка—Якобсталя, и найдите первые 100 из них.

4.14. Убедитесь в справедливости следующих аналогов формулы Бине:

$$J_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n), \qquad j_n = (2^n + (-1)^n).$$

4.15. Проверьте, что $j_n J_n = J_{2n}$.

4.16. Проверьте, что $j_n + J_n = 2J_{n+1}$.

4.17. Проверьте, что $j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$.

[45] W.Adams, D.Schanks, Strong primality tests that are not sufficient. — Math. Comput., 1982, vol.39, p.255–300.

[46] A.F.Horadam, Jacobsthal representation numbers. — Fibonacci Quart., 1996, vol.34, p.40–44.

Определим **числа Вибоначчи**[47] начальным условием $f_0 = f_1 = 1$ и [случайным] рекуррентным соотношением

$$f_n = \pm f_{n-1} \pm f_{n-2},$$

где на каждом шаге знаки $\pm$ принимаются равновероятно и независимо.

4.18. Напишите алгоритм, порождающий последовательности чисел Вибоначчи.

4.19. Породите достаточно длинный отрезок какой-то последовательности Вибоначчи и вычислите $\sqrt[n]{|f_n|}$ для больших n. Повторите этот эксперимент несколько раз. Что Вам бросается в глаза?

Ответ. *Невероятный* результат Висваната[48] утверждает, что для последовательности чисел Вибоначчи

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|} = 1.13198824\ldots$$

с *вероятностью* 1.

Определим **числа Кибоначчи**[49] начальным условием $F_0 = F_1 = 1$ и рекуррентным соотношением

$$F_n = (n+2)F_{n-1} - (n-1)F_{n-2}.$$

Числа Кибоначчи естественно возникают в разложении в непрерывные дроби различных рациональных выражений от e.

4.20. Напишите алгоритм, порождающий последовательности чисел Кибоначчи и вычислите несколько десятков значений.

§ 5. Некоторые другие числовые последовательности

Примите две таблетки, а завтра, если проснетесь, еще две.

`fomenko.ru`

Пусть $u < v$ два натуральных числа. Тогда (u, v)-**последовательность Улама** определяется следующим образом. Начальные условия: $x_1 = u$, $x_2 = v$. В качестве следующего числа берется первое число большее всех уже построенных, которое единственным образом представляется в виде суммы двух различных из них. Таким образом, $x_3 = x_1 + x_2$, $x_4 = x_1 + x_3$, а дальше возможны варианты.

5.1. Напишите рекуррентную программу, порождающую по u, v соответствующую последовательность Улама.

---

[47] B.Hayes, The Vibonacci numbers. — Amer. Scientist, 1999, vol.87, N.4, p.296–301.

[48] D.Viswanath, Random Fibonacci sequences and the number 1.13198824 … — Math. Comput., 2000, vol.69, p.1131–1155.

[49] M.J.Knight, W.O.Egerland, $F_n = (n+2)F_{n-1} - (n-1)F_{n-2}$. — Amer. Math. Monthly, 1974, vol.81, p.675–676.

5.2. Вычислите первые 100 членов $(1, 2)$-последовательности Улама.

Следующие задачи относятся к числовым последовательностям **типа Хофштадтера—Конвея**. Эти последовательности обсуждаются, в частности, в знаменитой книге Д.Хофштадтера[50].

• **Последовательность Ньюмана—Конвея** определяется начальными условиями $P(1) = P(2) = 1$ и рекуррентным соотношением

$$P(n) = P(P(n-1)) + P(n - P(n-1)).$$

5.3. Напишите программу, вычисляющую последовательность Ньюмана—Конвея, и вычислите значения $P(n)$ для $n \leq 100$.

5.4. Чему равно $P(2^m)$?

5.5. Сформулируйте и решите аналогичные вопросы для следующих последовательностей такого типа.

• Q**-последовательность Хофштадтера** — целочисленная последовательность, определенная начальными условиями $Q(1) = Q(2) = 1$ и рекуррентным соотношением

$$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)).$$

• **Последовательность Пинна**, определена теми же начальными условиями $D(1) = D(2) = 1$ и рекуррентным соотношением

$$D(n) = D(D(n-1)) + D(n-1-D(n-2)).$$

• **Последовательность Хофштадтера—Конвея** определена начальными условиями $a(1) = a(2) = 1$ и рекуррентным соотношением

$$a(n) = a(a(n-1)) + a(n - a(n-1)).$$

• **Последовательность Маллоуза**[51] определена начальными условиями $a(1) = a(2) = 1$ и рекуррентным соотношением

$$a(n) = a(a(n-2)) + a(n - a(n-2)).$$

• G**-последовательность Хофштадтера**, $G(0) = 0$,

$$G(n) = n - G(G(n-1))).$$

• H**-последовательность Хофштадтера**, $H(0) = 0$,

$$H(n) = n - H(H(H(n-1))).$$

---

[50] Д.Хофштадтер, Гедель, Эшер, Бах: эта бесконечная гирлянда. — Издательский дом “Бахрах–М”, Самара, 2001, 752с.

[51] C.L.Mallows, Conway’s challenge sequence. — Amer. Math. Monthly, 1991, vol.98, p.5–10.

• MF-**последовательность Хофштадтера** — известная также как `Male-Female` — определяется начальными условиями $F(0) = 1$, $M(0) = 0$, и рекуррентными соотношениями

$$F(n) = n - M(F(n-1)), \qquad M(n) = n - F(M(n-1)).$$

• FS-**последовательность Хофштадтера** — известная также как `Figure-Space` — определяется начальными условиями $F(1) = 1$, $S(1) = 2$, и рекуррентным соотношением

$$F(n) = F(n-1) + S(n-1),$$

а последовательность $S(n)$ состоит из тех целых, которые еще не попали в $F(1), \ldots, F(n)$.

5.6. А теперь сами придумайте еще несколько последовательностей такого типа и исследуйте их динамику.

Говорят, что последовательность натуральных чисел является последовательностью **без арифметических прогрессий**, если в ней нет никаких трехчленных арифметических прогрессий.

5.7. Пусть $k < l$. Постройте начинающуюся с k, l возрастающую последовательность натуральных чисел без арифметических прогрессий.

Указание. В качестве следующего члена последовательности на каждом шаге можно брать *наименьшее* натуральное число такое, чтобы в получившейся последовательности не было трехчленных арифметических прогрессий. Такая последовательность единственна.

Ответ. Опишем, что происходит в случае $(k, l) = (1, 2)$. Третьим членом этой последовательности не может быть 3, но может быть 4. Ничто не мешает взять в качестве четвертого члена 5. Ясно, что в качестве шестого члена 6 взять нельзя, при этом возникают сразу две прогрессии 2,4,6 и 4,5,6. Нельзя взять и 7, из-за возникновения прогрессии 1,4,7. Нельзя взять 8 из-за возникновения прогрессии 2,5,8. Нельзя взять 9 из-за возникновения прогрессии 1,5,9. Но ничто не мешает взять в качестве пятого члена 10. Продолжая действовать таким образом, мы построим последовательность

1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 28, 29, 31, 32, 37, 38, 40, 41, 82, 83, 85, 86, ...

5.8. Вычислите первые 100 членов минимальной начинающейся с k, l возрастающей последовательности натуральных чисел без арифметических прогрессий в случае, когда (k, l) имеет одно из следующих значений: a) (1,3), b) (1,4), c) (1,5), d) (2,3), e) (2,4), f) (2,5), g) (3,4), h) (3,5), i) (4,5).

Ответ. Ограничимся началом ответа для $(k, l) = (1, 3)$:

1, 3, 4, 6, 10, 12, 13, 15, 28, 30, 31, 33, 37, 39, 40, 42, 82, 84, 85, 87, ...

§ 6. Последовательность Туэ

Последовательность Туэ строится так: ее первый член равен 0, а дальше на каждом шаге 0 заменяется на 01, а 1 — на 10. Вот, что получается после первых трех шагов: 01, 0110, 01101001.

6.1. Напишите рекуррентную процедуру вычисления последовательности Туэ и вычислите несколько первых значений.

Ответ. Если исходить из определения, то

```
thue[1]={0};
thue[n_]:=thue[n]=ReplaceAll[thue[n-1],
                   {0->Sequence[0,1],1->Sequence[1,0]}]
```

Вычислим еще несколько значений:

0110100110010110,

01101001100101101001011001101001,

0110100110010110100101100110100110010110011010010110100110010110.

Уже отсюда видно, что каждый член последовательности Туэ получается следующим образом: к предыдущему члену приписывается его побитовое обращение. Поэтому последовательность Туэ еще проще задавать так:

```
thue[1]={0};
thue[n_]:=thue[n]=Join[thue[n-1],Mod[thue[n-1]+1,2]]
```

Последовательность Туэ замечательна тем, что она не содержит третьих степеней *никакого* подслова. В частности, в ней нет подслов вида 000, 010101, 001001001, ...

Произведем теперь с последовательностью Туэ следующую манипуляцию: разобьем ее на пары последовательных символов и заменим каждую пару 01 на 0, каждую пару 10 на 1, а пары 00 и 11 на 2. При этом получится бесквадратная **последовательность Морзе**[52], не содержит *квадрата* никакого подслова.

6.2. Конвертируйте последовательность Туэ в последовательность Морзе, вычислите несколько значений, после чего угадайте рекуррентное соотношение и напишите еще одну программу, вычисляющую последовательность Морзе.

Последовательность, для которой $f(n)$ равно числу блоков 11 в двоичной записи числа n, называется **последовательностью Рудина—Шапиро**.

6.3. Задайте только что описанную функцию $n \mapsto f(n)$ и вычислите первые несколько десятков ее значений.

Указание. Проще вычислять эту функцию не производя манипуляции над списком цифр, а непосредственно по цифрам. Если $n = a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0$ —

[52] M.Morse, G.A.Hedlund, Unending chess, symbolic dynamics, and a problem in semigroups. — Duke Math. J., 1944, vol.11, p.1–7.

двоичная запись числа n, то

$$f(n) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i a_{i+1}.$$

Определим теперь сумматорную функцию для *четности* числа $f(n)$:

$$g(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{f(i)}.$$

6.4. Задайте только что описанную функцию $n \mapsto g(n)$ и вычислите первые несколько десятков ее значений.

6.5. Вычислите несколько десятков значений $g(2^m)$ и угадайте общую формулу.

Ответ. Ответ угадывается сразу и, что самое смешное, он правильный[53]:

$$g(2^m) = \begin{cases} 2^{(m+1)/2} + 1, & 2 \not| m, \\ 2^{m/2} + 1, & 2 | m. \end{cases}$$

§ 7. Итерации

My operant powers their functions leave to do.

William Shakespeare, Hamlet

В настойщем параграфе рассмотрим нексолько простейших примеров, связанных с динамикой функций.

7.1. Рассмотрите функцию $f(x) = 1 + 1/x$. Вычислив несколько первых значений $f^n(1)$ найдите траекторию 1 и предел этой траектории.

В выпуске 2 мы уже рассматривали преобразование

$$f : n_1 \dots n_s \mapsto n_1^3 + \dots + n_s^3$$

сопоставляющее натуральному числу сумму кубов его цифр и искали его неподвижные точки.

7.2. Найдите все числа $n < 10^6$, для которых $f(n) \neq n$, но $f^2(n) = n$.

Ответ. До 10^6 имеется всего два таких цикла, а именно, $f(136) = 244$, $f(244) = 136$ и $f(919) = 1459$, $f(1459) = 919$.

7.3. Найдите все числа $n < 10^6$, для которых $f(n) \neq n$, но $f^3(n) = n$.

Ответ. Снова до 10^6 имеется всего два таких цикла, а именно, $f(55) = 250$, $f(250) = 133$, $f(133) = 55$ и $f(160) = 217$, $f(217) = 352$, $f(352) = 160$.

[53]R.Blacksmith, P.W.Laud, Some exact number theory computations via probability mechanism. — Amer. Math. Monthly, 1995, vol.102, p.893–903.

Рассмотрим теперь преобразование

$$f : n_1 \ldots n_s \mapsto n_1^5 + \ldots + n_s^5$$

сопоставляющее натуральному числу сумму пятых степеней его цифр.

7.4. Найдите все неподвижные точки функции f, меньшие $< 10^6$.

Ответ. Это 1, 4150, 4151, 54748, 92727, 93084, 194979.

7.5. Найдите наименьшее число, с которого начинается цикл функции f, если известно, что длина этого цикла ≤ 200.

Ответ. Это число 244, с которого начинается цикл длины 28

244, 2080, 32800, 33043, 1753, 20176, 24616, 16609, 74602, 25639, 70225, 19996, 184924, 93898, 183877, 99394, 178414, 51625, 14059, 63199, 126118, 40579, 80005, 35893, 95428, 95998, 213040, 1300, 244

Определим **преобразование Капрекара** следующим образом. Пусть n' получается из n перестановкой цифр в убывающем порядке, а n'' — перестановкой цифр в возрастающем порядке. Теперь мы можем определить преобразование Капрекара как $f : n \mapsto n' - n''$.

Ясно, что в случае, когда все цифры числа равны между собой, преобразование Капрекара сразу даст нам 0. Посмотрим теперь на его динамику в общем случае. Результат двух следующих задач поражает воображение.

7.6. Возьмите *случайное* трехзначное целое n и примените к нему 6 раз преобразование Капрекара. Повторите этот эксперимент несколько раз. Какой ответ получается у Вас каждый раз?

7.7. Возьмите *случайное* четырехзначное целое n и примените к нему 7 раз преобразование Капрекара. Повторите этот эксперимент несколько раз. Какой ответ получается у Вас каждый раз?

7.8. Найдите все неподвижные точки преобразования Капрекара $< 10^6$.

Ответ. Две из них Вы уже нашли в предыдущих задачах — это 495 и 6174. Никаких неподвижных пятизначных чисел нет, а вот шестизначных ровно два, 549945 и 631764.

7.9. Найдите все числа $n < 10^6$, для которых $f(n) \neq n$, но $f^2(n) = n$.

Ответ. В этом интервале преобразование Капрекара имеет ровно один цикл длины два, а именно, $f(53955) = 59994$ и $f(59994) = 53955$.

7.10. Существуют ли числа $n < 10^6$, для которых $f(n) \neq n$, но $f^3(n) = n$?

7.11. Найдите все числа $n < 10^6$, для которых $f^2(n) \neq n$, но $f^4(n) = n$.

Ответ. В указанном интервале преобразование Капрекара имеет ровно два 4-цикла, а именно, 61974, 82962, 75933, 63954 и 62964, 71973, 83952, 74943.

7.12. Существуют ли числа $n < 10^6$, для которых $f(n) \neq n$, но $f^5(n) = n$?

7.13. Существуют ли числа $n < 10^6$, для которых $f(n) \neq n$, но $f^7(n) = n$?

Ответ. Да, в рассматриваемом интервале имеется ровно один 7-цикл, а именно, 420876, 851742, 750843, 840852, 860832, 862632, 642654.

Рассмотрим следующую функцию

$$f(n) = \begin{cases} n/2, & n \text{ четно,} \\ 3n+1, & n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Траектории функции f называются **последовательностями Коллатца**. Существует предположение, что все они конечны и обрываются на 1. Литература, посвященная этой задаче — известной, как **проблема Коллатца** или **проблема** $3n+1$ — огромна, см., например[54]. На месте читателя, мы бы последовали совету Гая[55] и даже не пытались *всерьез* заниматься такого рода задачами!

7.14. Проверьте это предположение для всех $n \leq 100000$.

Решение. Определим функцию `collatz` следующим образом:

```
collatz[n_]:=If[EvenQ[n],n/2,3*n+1]
```

Впрочем, мы могли бы определить ее и так:

```
collatz[n_]:=n/2 /; EvenQ[n]
collatz[n_]:=3n+1 /; OddQ[n]
CollatzSequence[n_]:=NestWhileList[collatz,n,#!=1&]
```

Непосредственный эксперимент с этой функцией, который мы уточним в следующей задаче, убеждает нас в том, что для всех $n \leq 100000$ эти последовательности конечны.

7.15. Найдите самые длинные последовательности Коллатца и их максимальные элементы для $n \leq 10^n$, где $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Решение. Вычисляя что-нибудь в духе

```
Max[Table[Length[CollatzSequence[i]],{i,1,10^n}]]
```

мы можем найти максимум длин. В следующей таблице мы указываем числа n, для которых последовательность Коллатца имеет рекордную длину, среди чисел данной разрядности, длину этой последовательности Коллатца и ее наибольший элемент.

n	`length`	`max`
9	20	52
97	119	9232
871	179	190996
6171	262	975400
77031	351	21933016

7.16. Пусть a_1, a_2 — два вещественных числа. Начнем строить последовательность $a_{n+1} = |a_{n-1}| - a_n$. Докажите, что эта последовательность периодична периода 9.

---

[54] G.J.Wirsching, The dynamical system generated by the $3n+1$ function. — Springer LEct. Notes Math., vol.1681, Berlin et al., 1998, 158p.

[55] R.K.Guy, Don't try to solve these problems! — Amer. Moth. Monthly, 1983, vol.90, p.35–41.

7.17. Докажите, что отображение $(x, y) \mapsto (y, |x| - y)$ имеет период 9.

7.18. Докажите, что отображение $(x, y) \mapsto (y, (x + |x|)/2 - y)$ имеет период 5

В действительности строить периодические отображения совсем непросто. Большинство просто заданных отображений имеют весьма сложную динамику.