МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

CONTINUUM

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск №4(28) / Елец, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Павлова М.А. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ СЕТЕВЫМ ПРОЕКТОМ ОБУЧАЮЩИХСЯ «МУЗЕЙ ЗАНИМАТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ» … 8

Санина Е.И., Мозговая М.А. ТЕХНОЛОГИЯ РАЗВИТИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ ПОСРЕДСТВОМ КОНСТРУИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ GEOGEBRA........ 17

Смирнов Е.И., Кузнецова И.В., Тихомиров С.А. ВОЗМОЖНОСТИ ИНЖИНИРИНГА БАЗ ЗНАНИЙ В ФОРМИРОВАНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ………… 29

Шутрова И.В. ВЫЯВЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ПОЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ………… 39

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Боровских А.В. О СОДЕРЖАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ. МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКОВ………… 51

Нуретдинов Р.И. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ РАБОТА ПО ПОВЫШЕНИЮ КАЧЕСТВА ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ ВЫПУСКНИКОВ СПО.......... 66

Чудинский Р.М., Малев В.В., Малева А.А., Башарина С.О. ВЛИЯНИЕ КОНТЕКСТНЫХ ДАННЫХ НА УРОВЕНЬ СФОРМИРОВАННОСТИ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ ВЫПУСКНИКОВ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ВУЗА – БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ ИНФОРМАТИКИ……...... 74

ПЕРСОНАЛИИ

Тарасова О.В. УМЕНИЕ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ В МАТЕМАТИКЕ И В ЖИЗНИ (К 95-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ АКАДЕМИКА РАО, ЗАСЛУЖЕННОГО УЧИТЕЛЯ РФ, ЗАСЛУЖЕННОГО ДЕЯТЕЛЯ НАУКИ РФ, ДОКТОРА ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК, ПРОФЕССОРА ЮРИЯ МИХАЙЛОВИЧА КОЛЯГИНА)………… 98

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

DOI: 10.24888/2500-1957-2022-4-51-65

УДК 372.851

О СОДЕРЖАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ. МАТЕМАТИКА ДЛЯ НЕМАТЕМАТИКОВ

Боровских Алексей Владиславович
д.ф.-м.н., доцент
bor.bor@mail.ru
г. Москва

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Аннотация. Обсуждается методология конструирования содержания математической компоненты профессионального образования для нематематических специальностей. Показано, с одной стороны, что существующее положение вещей, когда курс математики для нематематиков представляет собой урезанный и фрагментированный курс математики для математиков является неизбежным. С другой стороны, продемонстрирована бессмысленность такого конструирования курса в силу принципиальной разницы в отношении математических средств мышления со стороны математиков и нематематиков: математики исследуют границы применимости тех или иных способов применения математических средств, а нематематики лишь пользуются этими средствами. Установлено, что для адекватного конструирования подобных курсов необходимо опираться не на представления о «тематическом содержании», а на понятия математического мыслительного средства, способа его использования и организованности этих средств и способов, определяемой профессиональной деятельностью. Представлена типология основных математических мыслительных средств (знаковые, идеальные, понятийные) и способы их использования в нематематических сферах деятельности (как метафора, как средство представления собственного содержания, как оперативное средство и как средство оперирования собственным содержанием). Выделена единица математического содержания в профессиональном проблемном поле в виде конструкта «профессиональная проблема – математическое средство – другая проблема». Отмечается развивающая функция математики: она может использоваться как материал для развития профессионально значимых качеств. В качестве итога представлена программа работ (которую автор предполагает реализовать) по формированию содержания математической компоненты образования для нематематиков. Одним из главных факторов успешности реализации такой программы становится методологическая организация взаимодействия математиков и нематематиков.

Ключевые слова: содержание математического образования, математическое мыслительное средство, способ, организованность.

Введение

Вопрос о том, как учить математике студентов нематематических специальностей вузов (естественно-научных, гуманитарных, инженерных) поднимается регулярно (см., например, Беляков, 2000; Горбачев, 2021; Деза, Чернецов, 2017; Круглов, Круглова, 2014; Лаухин, 2018; Пучков, 2020). К сожалению, до сих пор он обсуждался на уровне так называемого «тематического содержания»[1] (какие темы изучать, какие не изучать) и вариантов изложения теорем (с доказательством или без доказательства)[2]. К сожалению, разговор, исходящий из «тем» и производных понятий является непродуктивным (ниже мы поясним, почему), и, в конечном счете, никакой особой пользы не приносит.

Проблема заключается в том, что определение математической компоненты профессионального образования в другой специальности невозможно без выхода за нормативные рамки профессиональной математики. Вопросу о том, как это сделать и как осуществить действительно продуктивное проектирование «математики для нематематиков» и посвящена данная работа.

Постановка проблемы

Что происходит, когда математику предлагают разработать и прочитать курс высшей математики для студентов другой специальности? Конечно, он как специалист в каком-то конкретном разделе математики, владеет им в совершенстве и может там сконструировать любой вариант спецкурса. Но речь идет об общем курсе высшей математики. А такой курс в его распоряжении всего один – это тот, который прослушал он сам (других в его личном опыте нет, и сколько бы не перечитать чужих программ, от этого личный опыт пониманием, как построить этот курс, не обогатится).

Очевидным следствием этого факта является то, что математик не может построить курс математики для другой специальности иначе, чем «урезав» курс «математики для математиков», выкинув из него те неделимые единицы, которые возможно выкинуть в рамках выделенного объема часов. Такими единицами и являются «темы» и «доказательства».

Стоит ли говорить, что обсуждение содержания такого курса с профильным специалистом всегда носит довольно странный характер. С одной стороны, вопрос типа «А читать Вашим студентам такую-то теорему с доказательством или без?» ставит его в тупик – он вообще не понимает, о чем речь. С другой стороны, на вопрос типа «А нужны ли Вам ряды?» ответ обычно бывает «Ряды нужны, но безо всех этих Ваших «теорий» с эпсилон и дельта!», и этот ответ ставит в тупик уже математика, поскольку для него «Ряды» – это и есть теория рядов, в основании которой лежат определения, сформулированные в терминах «эпсилон и дельта».

В результате стороны достигают компромисса в смысле известного афоризма («Компромисс – это решение, которое не устраивает ни одну из сторон...»), и чтение математики для нематематиков вызывает отвращение и у тех, кому она читается (поскольку им очевидно, что для их профессионального образования это не нужно, так что этот курс превращается просто в насилие над личностью), и у тех, кто читает (поскольку тот результат своей деятельности, который преподаватель видит на контрольных и экзаменах, не может не вызывать отвращения, да плюс еще и отношение студентов)[3].

Не вполне очевидным является то, что такой результат в принципе неизбежен. Для того, чтобы сделать неочевидное очевидным, нам понадобится ввести ряд категориальных понятий, без которых ясности добиться нельзя.

---

[1] Исторический обзор эволюции содержания математического образования можно найти в (Попов, 2014).

[2] «Тематическое содержание» иногда детализируется (как, напр., в (Дураков, Кравцова, Майер, Подуфалов, 2021; Рослова, 2019)) – выделяются элементы темы (понятия, объекты, действия, правила, теоремы, доказательства и т.п.), иногда «укрупняется» (как в (Плакатина, 2003; Тестов, 2015)): выделяются «содержательные линии» – понятийные, объектные, логические и пр., но все равно отправным пунктом оказывается та или иная тема.

[3] Весьма выразительно это описано в (Еровенко, 2020).

Основные понятия

Прежде всего, следует обратиться к понятию *средства*, и совершить над собой некоторое усилие, «сдвинув» свое восприятие. Нужно привычные нам математические объекты перестать воспринимать как «данные нам вещи», а рассматривать их как *средства мышления*. Средства, созданные для того, чтобы мыслить что-то иное. Какие-то процессы, какие-то феномены, какие-то реальные (физические, инженерные и т.п.) объекты. Средствиальный взгляд на математику позволяет нам понять и зафиксировать первый фундаментальный тезис: *все сферы человеческой деятельности используют одни и те же математические мыслительные средства*. Числа, матрицы, функции, дифференциальные и интегральные соотношения, те или иные геометрические фигуры, статистики, логические конструкции используются всюду. В этом, собственно, и проявляется известная универсальность математики – как набора универсальных средств.

Второе понятие, которое нам понадобится – это понятие *способа* использования того или иного средства. Одно и то же средство может использоваться разными способами. Это видно даже на материале элементарной математики: такое простейшее знаковое средство, как буква, может использоваться по-разному. Она может обозначать конкретное известное число (например, в задаче «Найти a+5, если a=1,3,8,17»), неизвестное число (в уравнении), переменную величину (в многочлене или в неравенстве), сложное выражение («…обозначим $y=x^2+\sin x$, тогда…») и т.д.

Тем более, в разных сферах деятельности одно и то же математическое мыслительное средство может использоваться совершенно по-разному. Например, для математика формула

$$u(x) = \int\limits_{R^3} \frac{\rho(y)}{|x-y|} dV$$

означает *несобственный интеграл*, то есть предел интегралов по ограниченным областям, да еще с вырезанной окрестностью точки x (в которой есть особенность – подынтегральное выражение обращается в бесконечность), а интеграл по области – это предел интегральных сумм. Для физика же это *обозначение* того факта, что точечный заряд, находящийся в точке y, создает электростатическое поле с потенциалом $1/|x-y|$; если зарядов несколько, то потенциалы суммируются с коэффициентами, равными величинам зарядов; а если заряд «размазан» по области, то сумма должна быть заменена интегралом.

При этом физик пишет интеграл по R^3 исключительно «для удобства», чтобы не думать о том, по какой области распределен заряд. Этот заряд всегда конечен и область, по которой он распределен, всегда ограничена. Сходимость несобственного интеграла с особенностью в нуле он тоже не обсуждает, поскольку в полярных координатах особенности нет, а значит, и говорить не о чем. Наконец, интеграл для него – не предел, а просто знак континуального суммирования. Существует ли эта сумма, его не интересует, поскольку он имеет дело с *физической действительностью*, в которой и распределение зарядов, и поле, которое этими зарядами создано, уже существует, и обсуждаемая формула только *выражает связь* между ними. Вопрос о разности между верхней и нижней суммами Дарбу для него не имеет смысла.

Таким образом, мы можем сформулировать второй фундаментальный тезис: *в разных сферах человеческой деятельности математические мыслительные средства используются разными способами*. Именно на этом различии необходимо сконцентрировать свое внимание в первую очередь, когда мы говорим о содержании математического образования для нематематиков.

Третье понятие, которое нам потребуется – понятие *организованности*[4] мыслительных средств и способов их использования. Так же, как инструменты у хирурга

[4] Поскольку слово «организация» может пониматься неоднозначно – оно может обозначать и процесс, и результат этого процесса, и поскольку два этих значения обычно употребляются в одних и тех же контекстах, для различения процесса и результата некоторые авторы используют термин «организация» только для

расположены во вполне определенном порядке, так и мыслительные инструменты профессионала организованы вполне определенным образом, который отвечает решаемому классу профессиональных задач. И эти задачи у математика и у нематематика – разные.

Профессиональная математика, по большому счету, *исследует границы* тех способов использования математических мыслительных средств, которые известны в человеческой культуре[5]. В пограничных ситуациях интуиция (в том числе и профессиональная) отказывает – это достаточно «грубый» инструмент, он позволяет «схватить» суть дела, позволяет «почувствовать» наличие границы, но не позволяет ее точно обрисовать. Поэтому исследование границ опирается на логический аппарат, который является гораздо более громоздким, чем интуитивный, но зато гораздо более надежным и точным. И логическая структура «математического знания» именно этой проблемой – исследования границ – и определяется. Без нее математик перестает быть математиком. И поэтому профессиональное образование математика и связано с выстраиванием математических средств и способов в логическую систему. *Логическая система – организованность математических средств и способов в профессиональной математике*.

А что же нематематики? Их отношение к этой системе хорошо иллюстрирует следующий сюжет – диалог, произошедший у автора совсем недавно.

Один мой коллега, специалист в области теоретической педагогики, прислал мне следующую картинку (рис. 1), и попросил объяснить, как тут в точке максимума производная обращается в нуль.

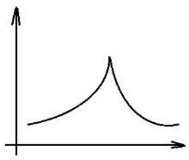

Рис. 1. Как производная в точке максимума обращается в нуль?

Естественно, я ему объяснил, что:

– *существенным понятием* является монотонность; если функция сначала возрастает, а потом убывает, то в соответствующей точке – максимум;

– производная является *вспомогательным средством* определения монотонности (производная положительна – возрастает, отрицательна – убывает);

– если производная непрерывна (как в школе), то она действительно в точке максимума обращается в нуль;

– но *непрерывность не обязательна* – важно, что она меняет знак с плюса на минус, а как – непрерывно, скачком, или с $+\infty$ на $-\infty$, как на картинке – неважно;

– у использования производной как средства для определения монотонности есть *границы*, они определяются понятием *абсолютной непрерывности функции*;

– за этими пределами мы сталкиваемся с разными парадоксальными ситуациями, например, есть функция Кантора, производная которой почти всюду равна нулю, но которая монотонна.

Поскольку я имел дело с достаточно глубоко мыслящим человеком, известным специалистом в своей области (в теоретической педагогике), обладавшим прекрасно развитой рефлексией, я попросил дать «обратную связь» – что он понял из моего объяснения. Он сказал, что понял про монотонность; понял, что производная не обязана быть непрерывной, и поэтому не обязана обращаться в нуль; понял, что в его примере она просто перепрыгивает с плюс на минус бесконечность. «…А про Вашу эту абсолютную

процесса, а для результата предпочитают термин «организованность». Мы считаем такое разделение значений удачным, и будем использовать его в дальнейшем.

[5] Как нетрудно видеть, такое понимание математики явно противоречит представлениям о математике в (Горбачев, 2011; Смирнов, 2020).

непрерывность я и думать не хочу, если вдруг понадобится – позвоню Вам, и Вы мне объясните…».

Приведенная ситуация демонстрирует характерную ситуацию: нематематики работают в условиях, в которых те границы, которые исследуют математики, находятся «бесконечно далеко». И даже если они, паче чаяния, к этим границам приблизятся, им все равно лучше обратиться к профессионалу, чем самостоятельно что-то там делать, рискуя получить неверный результат уже в своей профессиональной области.

Таким образом, мы можем сформулировать третий фундаментальный тезис: *логическая организованность математического знания, которая осваивается математиками в рамках их математического образования, нематематикам не нужна.*

А что же нужно? Чтобы понять это, нам придется более подробно обсудить типы математических мыслительных средств и типологию способов их использования.

Типы математических мыслительных средств и их функции

Математические мыслительные средства разделены на несколько типов.

Первый из них – это *знаковые средства*. Знак – это элемент отношения «обозначающее-обозначаемое». К знаковым средствам относят как простые – цифры, буквы, термины, так и сложные, к числу которых относится и наиболее распространенное в математике – формула.

Функции знаковых средств (вообще, а не только в математике) – замещение оперирования с реальным объектом оперированием со знаком. То есть на знаки мы фактически переносим *действия*. При этом устройство знака (по крайней мере это верно для простейших знаковых средств) не имеет никакого отношения к устройству обозначаемого объекта. Для сложных же знаковых средств их «устройство» приспособлено к действиям, которые мы со знаками производим (и это отношение оказывается обратным, в сравнении с обозначаемым объектом, – там система наших действий приспосабливается к устройству этого объекта).

Второй тип мыслительных средств – *идеальные* средства. Примером таких идеальных средств могут служить геометрические фигуры. Идеальные средства создаются с помощью чисто мыслительной процедуры *идеализации*, то есть доведения каких-то свойств до предельного состояния. «Линия – то, что не имеет ни ширины, ни толщины…», как написано у Евклида. Можно нарисовать толстую линию, можно более тонкую, можно совсем тоненькую, и если мысленно продолжить это «утончение», то «в пределе» мы и получим геометрическую линию – такую, как ее нам представляет Евклид.

Функция идеальных мыслительных средств состоит в том, что они позволяют нам проводить *логические рассуждения*. Сумма углов треугольника равна 180° только для *идеального* треугольника, составленного из идеальных линий, и это можно доказывать. Для нарисованного треугольника сумма углов – это нечто не очень определенное, мы можем ее измерить, но все это с какой-то точностью.

Наконец, третий тип мыслительных средств – *понятийные*. Как нетрудно догадаться, *понятия* являются средствами *понимания*, то есть установления некоего *отношения* между различными объектами, феноменами, структурами, системами и пр. И здесь нужно различать две принципиально разные ситуации.

Одна – это внутри-математическое употребление понятий. Здесь мы имеем достаточно отточенную родовидовую понятийную систему, в которой каждое понятие задается родовым понятием и признаками, выделяющими его как вид. Например, «треугольник – плоская геометрическая фигура, ограниченная замкнутой ломаной из трех звеньев». Такая система вполне эффективна для решения тех задач и проблем, которыми занимаются математики, поскольку переходы от более общих понятий к более частным и наоборот представляют собой одну из наиболее распространенных операций математического мышления.

И совсем другое дело – употребление этих понятий нематематиками. Например, они могут оперировать с рядами или с интегралами и решать дифференциальные уравнения, но понятие предела им совершенно не нужно. Они могут работать с нелинейным уравнением Навье-Стокса, но совершенно не нуждаться в классификации уравнений линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Это – ситуация, когда математические понятия используются в другой функции – установления отношения между неким объектом профессиональной деятельности и неким математическим объектом, так что оперирование с объектом профессиональной деятельности можно связать с оперированием некоей математической структурой или отношением.

Способы употребления математических мыслительных средств

Перечисленные средства мышления могут использоваться вне математики несколькими способами, и различение этих способов очень важно при построении соответствующего курса математики.

1-й способ – в качестве метафоры. Использование математическое мыслительного средства как метафоры происходит в гораздо более широких рамках, чем это может показаться на первый взгляд. Наиболее распространенные примеры такого использования – употребление терминов «фрактальный», «самоподобие», «бифуркация», «интегральный», «вектор», «вероятность», «поле» и т.п., которое не имеет никакого отношения к математическим фракталам, самоподобию, бифуркации и пр. И если в случае первых нескольких терминов даже простого взгляда на ситуацию их употребления делает метафорическую функцию очевидной, то в случае последних это бывает достаточно трудно обнаружить, тем более, что представители соответствующей науки или сферы деятельности бывают нередко глубоко убеждены, что говорят именно о «математическом» векторе или вероятности, а не о метафоре.

Использование метафорических средств в принципе в науке не только не запрещено, но и неизбежно – тогда, когда речь идет о *феноменологии*, то есть исключительно о наблюдении тех или иных феноменов (явлений), безо всякого вмешательства в их ход. Такие ситуации широко распространены и в естественных, и в гуманитарных науках. Они возникают или тогда, когда наше вмешательство невозможно, в силу отсутствия тех или иных ресурсов, или тогда, когда наше вмешательство представляет опасность или риски, на которые мы не готовы идти, или тогда, когда последствия нашего вмешательства могут оказаться непредсказуемыми.

Во всех этих ситуациях наблюдатель, не имея возможности выявить сущностную сторону феномена (она выявляется только через то или иное действие на объект), вынужден структурировать свои наблюдения, используя те или иные мыслительные средства, взятые из другой сферы деятельности, из другой науки. Именно потому, что мыслительные средства взяты «из другого места», они оказываются *метафорами*.

Характерный пример такой метафоры мы можем подчерпнуть из почти что «школьной» физики. Аристотель писал, что тело, брошенное произвольным движением руки, сначала летит по наклонной прямой, потом описывает дугу окружности, а потом падает вертикально вниз (см. рис. 2 слева). Обратим внимание, что описывает он физический процесс, а *средства его структурирования* берет из другой науки – из геометрии! Поэтому и «прямая», и «окружность» здесь фигурируют не в качестве геометрических объектов, а в качестве метафор, которые наиболее удачно позволяют структурировать траекторию полета и удерживать ее в воображении.

И сравним это описание с тем представлением, которое ввел Галилей, который движение не только наблюдал (как это делал Аристотель), а еще и *изменял* (скатывая шары с наклонных досок). Здесь движение разделено не по частям траектории, а на вертикальную и горизонтальную составляющую (рис. 2, справа), а действие на тело – на тяжесть и сопротивление (воздуха и качения).

Таким образом, мы, проектируя курс математики, должны выделять те случаи, в которых математическое мыслительное средство в соответствующей профессиональной деятельности используется как метафора, и вводить его в курс математики только в плане «общего представления», скорее не как составляющую образования, а как составляющую просвещения (об их различении см. (Боровских, 2021; Боровских, 2020)).

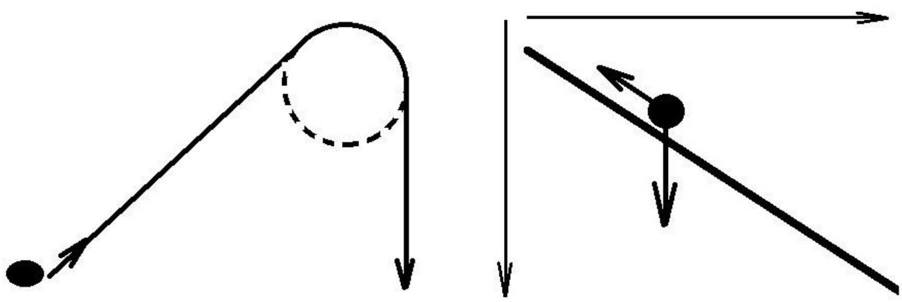

Рис. 2. Движение тела у Аристотеля (слева) и Галилея (справа)

2-й способ – в качестве средства представления своего собственного содержания. Это – способ, используемый тогда, когда существенные составляющие и отношения между ними в соответствующей науке или сфере деятельности уже выделены, но они еще не стали предметом действия, предметом изменения. Тогда оказывается весьма удачным обратиться к математическим формулам или иным средствам, в которых зафиксированы такие же отношения, и выражать отношения между объектами профессиональной деятельности на «языке» этих формул[6].

Наиболее часто встречающееся такое употребление математики – это использование некоторых дифференциальных уравнений общего характера. Они не решаются и не исследуются. Они только записываются, и эта запись позволяет обсуждать тот факт, что вот это слагаемое – это перенос какой-то важной характеристики изучаемого объекта (например, плотности среды) при движении, это – возникающее в результате сжатия среды давление, это – внешняя сила (скажем, тяготение), и так далее.

В принципе для решения и исследования дифференциальных уравнений в математике есть много разных методов – и степенные ряды, и ряды Фурье, и метод малого параметра, и метод последовательных приближений, – всех не перечислить. Но они, в рамках указанного способа, остаются «за бортом» по простой причине – в профессиональных представлениях соответствующей сферы деятельности нет адекватных операций. Они не понимают, что означает, скажем, с точки зрения метеорологии, третий член разложения решения по степеням скорости. Или что означают, с точки зрения химии, автоколебания (это исторический факт – что химики довольно долго не признавали возможности автоколебаний, и поэтому работа Белоусова довольно долго не встречала понимания).

За пределами обсуждения оказываются и вопросы о том, что будет, если добавить, убрать или изменить то или иное слагаемое в уравнении, пренебречь теми или иными параметрами (или тем, что они изменяются) и т.п. Формулы при таком способе их использования существуют как фиксированная данность, не подлежащая варьированию.

Единственная операция, которую обычно совершают при таком способе использования математических мыслительных средств – это «численное моделирование», то есть расчет, в котором с помощью того или иного численного метода, для конкретных данных находится «численное решение» – для того, чтобы сравнить его с результатами натурных измерений.

Математические мыслительные средства, используемые таким способом, имеет смысл осваивать также на уровне «просвещения», но уже не в плане «общего представления», а на уровне освоения «справочников» разного типа, где можно найти формулы, выражающие нужного типа отношения. Кроме того, имеет смысл осваивать и соответствующие техники «численного моделирования», как «ручные», так и в виде разнообразных «пакетов».

---

[6] Конкретные примеры такого использования математических средств обсуждаются, в частности, в (Еровенко, 2022; Левин, 2015).

3-й способ – в качестве оперативного средства. Это – уже гораздо более серьезный способ использования. Как правило, речь идет о некоторой *оперативной системе*, операции в которой соответствуют некоторой профессиональной системе операций, при этом математическая система используется *формально*. Корректность совершаемых операций и применимость тех или иных приемов здесь определяются не логико-математическими причинами, а содержательным смыслом соответствующей науки или сферы деятельности. Такая ситуация очень характерна для физики, инженерии и отчасти некоторых других естественных наук.

Например, дифференциал в физике используется как некая «единица», «малая величина», из большого количества которых складывается величина «большая». Правила оперирования с этой величиной позволяют выводить уравнения, справедливость которых подтверждается «физическим смыслом» соответствующего процесса и совпадением полученного решения с результатами натурных экспериментов.

Обсуждение дифференциала как «главной линейной части приращения» для физика не имеет смысла: для него это – обозначение единицы материи, а не логический конструкт, предназначенный для того, чтобы доказать непротиворечивость системы операций с дифференциалами.

Совершенно понятно, что такого рода математические мыслительные средства необходимо вводить «аксиоматически», как определенную систему операций, которая должна быть освоена (такое освоение некоторой системы действий обычно называют «подготовкой», которая в понятийном плане отличается от уже упомянутых «образования» и «просвещения»), и про которую необходимо только знать, что «где-то там» есть границы, и что «где-то там», за этими границами, все будет выглядеть совсем не так. Для того, чтобы студенты это почувствовали, достаточно нескольких примеров того, что происходит, когда мы оказываемся «на границе» и когда «вышли за допустимые пределы».

4-й способ – его можно считать «промежуточным» между вторым и третьим – как средство оперирования своим собственным содержанием. Это – гораздо менее распространенный способ, однако он тоже имеет свои основания. Мы должны понимать, что понятия классической физики, связанные с процессами, которые мы можем наблюдать и изменять в обыденной жизни (течения жидкостей и газов, тяготение, электрические явления и пр.) опираются на язык, связанный с нашим восприятием. Конечно, в профессиональном употреблении этот язык «оттачивается», значения слов становятся существенно более точными, но, тем не менее, сам язык уже есть.

Более современные разделы физики имеют дело с процессами, которые мы в обычной жизни уже не встречаем. И языка описания соответствующих явлений нет в принципе. И вот в этой ситуации математические мыслительные средства становятся таким «языком». В рафинированной форме это выражено в квантовой механике в виде может, несколько грубоватого, но выражающего существо проблемы тезиса «элементарная частица есть волновая функция». В чем-то это – аналог той мысли, что «слон – это то, что называется слоном».

Этот способ, с одной стороны, аналогичен второму: математические отношения здесь существенны, но он идет дальше, полагая математические операции с соответствующим математическим средствам выражением тех действий с профессиональным объектом, которых пока еще нет, которые мы пока не можем ни совершить, не представить с помощью иных, не связанных с математикой средств (что и отличает этот способ от третьего, где такие средства есть, и поэтому результат математических операций может быть проинтерпретирован в нематематических профессиональных представлениях).

Совершенно понятно, что такое использование математических мыслительных средств – это уже некий «профессиональный риск», но, когда ничего другого нет – приходится работать и так. При этом профессионал здесь фактически работает в «пограничной ситуации», и занимается «исследованием границ», но не тех, которыми занимается математик, а других – границ применимости операциональной системы из математики как средства, представляющего операциональную деятельность с профессиональным объектом.

Такого рода математические мыслительные средства нужно осваивать, как и в предыдущем случае, как операциональную систему, задаваемую аксиоматически, но при этом необходим еще один, методологический уровень (который с точки зрения соответствующего профессионала является основным) – что произойдет, если изменить систему аксиом и полаганий? Как изменится вся операциональная система?

Следует отметить, что помимо описанных четырех способов использования математических мыслительных средств, которые действительно можно отнести к «профессиональным», поскольку они имеют вполне объективные основания, имеется множество суррогатных. В числе наиболее распространенных таких способов – «*вульгарное моделирование*» (когда просто подбирается уравнение, решение которого имеет нужный вид, и это объявляется «моделью»), «*маскировка*» (когда отсутствие понимания каких-то сущностных вещей и причинно-следственных связей в своей профессиональной области заменяется апелляцией к математическим рассуждениям, наиболее широко это связано с использованием статистических методов) и «*наукообразие*», когда отсутствие собственного содержания прикрывается изобилием «научных» терминов.

Конечно, такие способы употребления математики вряд ли следует связывать с задачами математического образования, хотя специалисты в соответствующей области, бывает, свято верят, что «именно так и надо».

Математическое мыслительное средство в профессиональном проблемном поле

Перейдем теперь к более конкретным вопросам – о том, как именно «работают» математические мыслительные средства в той или иной профессиональной деятельности, и начнем обсуждение с характерного сюжета – диалога с одним из коллег, специалистов в области естественных наук. Обсуждался как раз вопрос о том, чему и как учить их студентов, и преподаватель, который ведет курс «Дифференциальные уравнения», спросил:

– Ну, хорошо, вот Вы сами используете в своей профессиональной деятельности дифференциальные уравнения?

– Да, конечно!

– Ну так, скажите, какие, – и я буду их обсуждать в своем курсе со студентами.

– Да Вы их убьете этими уравнениями, они слишком сложные для них.

Тут уже в диалог вмешался автор этой статьи:

– Хорошо, те уравнения, которые Вы актуально используете, слишком сложные, но были же в истории Вашей науки и более простые, которые тоже сыграли свою роль?

– Да, были и мы их в своих спецкурсах обсуждаем!

– Так в чем же дело, давайте мы их на курсе «Дифференциальные уравнения» тоже рассмотрим, и тогда студентам будет понятно, зачем они изучают дифференциальные уравнения…

– Понимаете ли, там, в связи с этими уравнениями, возникают некоторые проблемы, поскольку эти уравнения оказываются применимыми лишь отчасти…

Этот диалог показывает нам одну из основных проблем обучения математике нематематиков (по крайней мере естественно-научного профиля, но, я думаю, про это не мешает думать и при обучении гуманитариев). *Математические мыслительные средства встроены в профессиональную деятельность* и не могут рассматриваться изолированно от нее, по крайней мере – от *профессионального проблемного поля* (Боровских, 2016), то есть круга проблем, решаемых той или иной наукой или сферой деятельности. Математическое средство применяется при решении одной проблемы, дает определенный результат, и *выводит на другую проблему*, и именно эта связка «проблема – математическое средство – проблема» является неделимой «единицей» в профессиональной деятельности.

Собственно, именно «неделимость» этой единицы и создает проблему, поскольку для математика все-таки достаточно затруднительно обсуждать проблемное поле другой науки[7], а специалисту в другой области вряд ли стоит брать на себя ответственность за дифференциальные уравнения или иной раздел математики.

Правда, мы можем заметить и то, что это – проблема уже не построения содержания образования, а проблема организации обучения, в обсуждение которой мы в данной работе уходить не хотели бы (хотя различные решения этой проблемы имеются, начиная от формальных – типа согласования курсов или проведения бинарных лекций, и кончая неформальными, связанными с расширением компетенции математиков, преподающих тем или иным нематематикам, за счет некоего «дополнительного образования», повышения квалификации, позволяющего понимать профессиональное проблемное поле соответствующей сферы деятельности).

Мы же зафиксируем главный результат этого параграфа: математическая компонента содержания профессионального образования в той или иной сфере деятельности имеет единицей конструкт «проблема – математическое средство – проблема», и для определения содержания математического образования необходимо выделение таких единиц не только и не столько в актуальной профессиональной деятельности, сколько в ее историческом развитии. Собственно, именно «проекцию» всей истории развития профессионального проблемного поля на единую плоскость мы и назвали в (Боровских, 2016; Боровских, 2020) *учебно-профессиональным проблемным полем*, и рассматривали его как главное основание для всего образования.

Математика для развития

До сих пор мы обсуждали математическую компоненту образования только в утилитарной функции – как обеспечение профессионала математическими мыслительными средствами. Но есть у математики и другая функция, которая в средней школе является основной, а в профессиональном образовании – вспомогательной, хотя и не менее важной. Это – функция общего развития человека. Если говорить более точно – то развития целого ряда функций – интеллектуальных (пространственное, алгоритмическое, структурное, динамическое, логическое и т.д. мышление), психических (самоконтроль, самоорганизация, планирование и многие другие «само-…»), коммуникативных (взаимодействие в рамках той или иной деятельности), и целого ряда других[8].

Несомненно, что реализация этой функции в профессиональном образовании требует не менее, а более сложной работы. Действительно, профессионал легко ответит Вам на вопрос, использует ли он то или иное математическое мыслительное средство в своей профессиональной деятельности, а если использует – то как. Но он вряд ли сможет так же легко ответить на вопрос, какую роль в его интеллектуальном развитии сыграли ряды Фурье или теорема о трех перпендикулярах. Этот вопрос требует рефлексии, для которой в настоящее время просто нет подходящей технологии – ни средств, ни способов их использования. Поэтому вопрос о развивающей функции математического образования – вопрос специальной *исследовательской программы*.

Дополнительное обременение обсуждаемой проблемы задает и то, что фактически и в школе математическое образование с точки зрения развивающей функции не выстроено (см., напр., (Боровских, Розов, 2011; Боровских, Веревкина, 2015; Боровских, 2020), и поэтому

---

[7] Конечно, мыслящие люди редко ограничивают круг своих интересов только профессиональными вопросами, и трудно представить себе человека, который преподает математику, скажем, биологам, и при этом категорически не хочет знать, чем там они занимаются и зачем им математика. Однако наша задача – показать проблему как *позиционную*, то есть связанную с определенностью и ограниченностью позиций. Позиция математика ограничивает его ответственность – он *позиционно* отвечает только за математические вопросы. И если математик решает позиционную проблему за счет выхода за пределы своей профессиональной позиции и использования каких-то уже личностных ресурсов (как минимум – интеллектуальных), то это –лишь один из способов решения сформулированной проблемы, а отнюдь не ее отсутствие.

[8] Такой взгляд на математику обсуждается, например, в (Горбачев, 2019).

остается неясным, в вузе эта функция является чисто компенсационной (то есть мы «доучиваем» тому, чему плохо учили в школе), то ли у нее есть самостоятельное значение, связанное именно с профессиональной деятельностью. В силу сложившегося положения дел в школе мы в вузе фактически вынуждены сосредотачиваться на «компенсации», и с этой точки зрения может оказаться, что нематематикам полезнее пройти «углубленно» какие-то разделы школьной программы (например, стереометрию, тригонометрию, и т.п.), чем изучать какие-то разделы высшей математики.

Но в любом случае, при конструировании содержания математического образования для нематематиков необходимо рассматривать развивающую функцию математики как самостоятельную, не связанную с профессиональными навыками, и в этом содержании синтезировать и функцию утилитарную (использования математических мыслительных средств), и развивающую.

Программа конструирования математической компоненты профессионального образования для нематематиков

Все сказанное выше показывает, что конструирование содержания математического образования для нематематиков является достаточно сложной задачей, которая не может быть решена «единовременно», в рамках какого-то проекта. Это – задача, которая требует более широкого формата, который называют обычно *программой*.

Программа, в отличие от проекта, не ограничена определенными рамками времени и места, ресурсов, не имеет в качестве цели определенного продукта, и т.п. Однако и проектная деятельность вне контекста какой-то программы оказывается активностью без ясного смысла. Так что программа фактически определяет смысл проектов, которые в рамках этой программы осуществляются – тогда, когда для этого возникают условия.

Приводимая ниже программа[9] формирования содержания математической компоненты профессионального образования и рассматривается как контекст для последующих проектных работ, которые будут выполняться по мере возможности.

- Выявление, в коммуникации со специалистами соответствующего профиля, «единиц» вида «проблема – математические средства – проблема» в рамках проблемного поля соответствующей сферы деятельности, как в его актуальном состоянии, так и в его историческом развертывании (не исключено, что при этом придется как-то определять и само проблемное поле этой сферы деятельности).
- Для каждой такой единицы фиксация способа использования в ней математических мыслительных средств и отнесения этого способа к тому или иному типу (из описанных выше, хотя список может быть пополнен).
- Разработка для каждого типа использования методики введения соответствующих мыслительных средств в рамках профессионального образования (некоторые принципиальные моменты этих методик были также отмечены выше).
- Выявление, в коммуникации со специалистами соответствующего профиля, необходимых для профессиональной деятельности надпредметных (общих) навыков и способностей, которые могут быть сформированы на материале математики.
- Проектирование системы развития таких навыков и способностей, исходя из актуального уровня приходящих учиться студентов.
- Разработка методики освоения этих навыков и способностей, в том числе используя математический материал.
- Сборка «развивающей» и «утилитарной» компонент образования в виде образовательной программы.
- Апробация образовательной программы на практике.

[9] Автор ее рассматривает прежде всего, как программу собственных работ, но не видит ничего плохого и в том, если ее примут для себя и другие: программа как культурное средство в принципе является «обобществленной», ее нельзя считать, в отличие от проекта, «чьей-то».

Таким образом, мы показали (и надеемся, что вполне убедительно), что построение адекватного содержания математического образования для нематематиков вне представленной программы невозможно. Она является *необходимой* (в математическом смысле этого слова), хотя, возможно, и не достаточной. Нет сомнения, что ее реализация возможна только через весьма сложное взаимодействие математиков с профессионалами, которое может оказаться продуктивным только при условии грамотной *методологической организации* этого взаимодействия. Опыт такой организации, по мере реализации этой программы, мы постараемся представить в последующих работах.

Список литературы

Беляков Л.М. Математика для нематематиков // Педагогические и информационные технологии в образовании. 2000. № 3. С. 1-3.

Боровских А.В., Розов Н.Х. Надпредметное содержание школьного курса математики // Труды IX международных Колмогоровских чтений: сборник статей. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2011. С. 22-29.

Боровских А.В., Веревкина В.Е. Предметные и метапредметные проблемы школьного курса математики. Тема "Неравенства" // Наука и школа. 2015. № 5. С. 77-87.

Боровских А.В. К проблеме образовательной мотивации // Деятельностная педагогика и педагогическое образование (ДППО-2015): сборник трудов III Международной конференции, Воронеж, 18–22 сентября 2015 года / Под ред. А.В. Боровских. Воронеж: ООО Издательство "Научная книга", 2016. С. 24-44.

Боровских А.В. Деятельностная педагогика: Схемы педагогического мышления: монография. М.: ООО "МАКС Пресс", 2020. 352 с.

Боровских А.В. Образование или просвещение? // Деятельностная педагогика и педагогическое образование (ДППО-2017 – ДППО-2019): сборник статей. М.: ООО "МАКС Пресс", 2021. С. 58-62.

Горбачев В.И. Содержание общего математического образования и математическая картина мира // Вестник Брянского государственного университета. 2011. № 1. С. 282-294.

Горбачев В.И. Содержание логико-понятийной компетенции общего математического образования (методико-математические основы) // Наука и школа. 2019. № 1. С. 84-93.

Горбачев В.И. Развитие общего и профессионального математического образования в содержании Международного научного семинара в Брянском государственном университете // Ученые записки Брянского государственного университета. 2021. № 3(23). С. 7-13.

Деза Е.И., Чернецов М.М. О проблемах содержания современного математического образования // Школа будущего. 2017. № 6. С. 160-166.

Дураков Б.К., Кравцова О.В., Майер В.Р., Подуфалов Н.Д. О содержании школьного математического образования и разработке учебников нового поколения по математике // Известия Российской академии образования. 2021. № 3(55). С. 105-119. DOI 10.51944/2073-8498_2021_3_105.

Еровенко В.А. Психологическое "принуждение к обучению" как когнитивно-методологический навык преподавателя высшей математики // Проблемы онто-гносеологического обоснования математических и естественных наук. 2020. № 11. С. 6-13.

Еровенко В.А. "Понимаемая математика" как средство реализации концепции когнитивной технологии в предметной области социально-экономической географии // Российский гуманитарный журнал. 2022. Т. 11. № 1. С. 25-34. DOI 10.15643/libartrus-2022.1.2.

Круглов Е.В., Круглова С.С. Об организации учебной работы студентов на лекциях и практических занятиях по математике // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 2-1. С. 68-71.

Лаухин В.В. Содержание математической подготовки будущих инженеров, техников в системе среднего профессионального образования в контексте новых образовательных стандартов // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2018. № 4(12). С. 146-153.

Левин В.М. Технический прогресс в строительстве и содержание математического образования будущих инженеров-исследователей этого направления // Сборник научно-методических работ. Донецк: Донецкий национальный технический университет, 2015. С. 98–102.

Плакатина О.И. Логико-дидактический анализ состава содержания математического образования // Педагогический университетский вестник Алтая. 2003. № 1. С. 103–113.

Попов А.А. Генезис содержания математического образования в СССР (1940-1960-е гг.) // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 5(116). С. 214-219.

Пучков Н.П. Формирование математического стиля мышления при подготовке правоведов // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. 2020. № 3(77). С. 153-165. DOI 10.17277/voprosy.2020.03.pp.153–165.

Рослова Л.О. О представлении содержания математического образования в федеральных государственных образовательных стандартах общего среднего образования // Отечественная и зарубежная педагогика. 2019. Т. 1. № 6(63). С. 121-132. DOI 10.24411/2224-0772-2019-10048.

Смирнов Е.И. Инновационное содержание и синергия математического образования будущего учителя // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2020. Т. 13. С. 181-232.

Тестов В.А. Формирование основных математических понятий у школьников на основе концепции фундирования // Ярославский педагогический вестник. 2015. № 3. С. 48-52.

ABOUT THE CONTENT OF MATHEMATICAL EDUCATION. MATHEMATICS FOR NON-MATHEMATICIANS.

Borovskikh A. V.
Dr. Sci. (Mathematics), associate professor
bor.bor@mail.ru
Moscow

Lomonosov Moscow State University

Abstract. The methodology for constructing the content of the mathematical component of vocational education for non-mathematical specialties is discussed. It is shown, on the one hand, that the current state of affairs, when the course of mathematics for non-mathematicians is a truncated and fragmented course of mathematics for mathematicians, is inevitable. On the other hand, the senselessness of such a course design is demonstrated due to the fundamental difference in relation to the mathematical means of thinking of mathematicians and of non-mathematicians. The first ones explore the limits of applicability of certain methods of using mathematical tools, while the second only use these means. It is shown that in order to adequately design such courses, it is necessary to rely not on ideas about the “thematic content”, but on the concepts of a mathematical thinking tool, of the way it is used, and of the organization of these tools and methods, determined by professional activity. A typology of the main mathematical mental means (sign, ideal, conceptual) and ways of their use in non-mathematical fields of activity (as a metaphor, as a means of representing one's own content, as an operational tool and as a means of operating one's own content) are presented. A unit of the mathematical content in the professional problem field has been singled out in the form of the construct "professional problem – mathematical tool – another problem". The developing function of mathematics is noted: it can be used as a material for the development of professionally significant qualities. As a result, a program of work (which the author intends to implement) on the formation of the content of the mathematical component of education for non-mathematicians is presented. One of the main success factors for the implementation of such a program is the methodological organization of the interaction between mathematicians and non-mathematicians.

Keywords: content of mathematical education, mathematical mental tools, method, organization.

References

Belyakov, L. M. (2000). Matematika dlya nematematikov. *Pedagogicheskie i informatsionnye tehnologii v obrazovanii*, 3, 1-3. (In Russ.)

Borovskikh, A. V., Rozov, N. Kh. (2011). Nadpredmetnoye soderzhaniye shkol'nogo kursa matematiki. *Proceedings of the IX International Kolmogorov Readings: a collection of articles*. Yaroslavl: Publishing House of YaGPU, 22-29. (In Russ.)

Borovskikh, A. V., Verevkina, V. E. (2015). Disciplinary and meta-disciplinary problems of school mathematics. The topic "Inequalities". *Science and School*, 5, 77-87. (In Russ., abstract in Eng.)

Borovskikh, A. V. (2016). K probleme obrazovatel'noy motivatsii [On the problem of educational motivation]. *Doing Pedagogy and Pedagogical Education (DPPO-2015): Proceedings of the III International Conference, Voronezh, September 18–22, 2015 / Ed. A.V. Borovskikh* (pp. 24-44). Voronezh: LLC "Publishing house" Scientific book ". (In Russ.)

Borovskikh, A. V. (2020). *Doing pedagogy: Schemes of pedagogical thinking*. Moscow: MAKS Press LLC. (In Russ., abstract in Eng.)

Borovskikh, A. V. (2021). Education or enlightenment? *Doing Pedagogy and Pedagogical Education (DPPO-2017 - DPPO-2019): collection of articles*. Moscow: MAKS Press LLC, 58-62. (In Russ., abstract in Eng.)

Deza, E. I., Chernetsov, M. M. (2017). About problems of content of modern mathematical education. *School of the future*, 6, 160-166. (In Russ., abstract in Eng.)

Durakov, B. K., Kravtsova, O. V., Mayer ,V. R., Podufalov, N. D. (2021). About the content of school mathematical education and the development of the new generation textbooks in mathematics. *Proceedings of the Russian Academy of Education*, 3 (55), 105-119. DOI: 10.51944/2073-8498_2021_3_105. (In Russ., abstract in Eng.)

Erovenko, V. A. (2020). Psikhologicheskoye "prinuzhdeniye k obucheniyu" kak kognitivno-metodologicheskiy navyk prepodavatelya vysshey matematiki. *Problems of onto-epistemological substantiation of mathematical and natural sciences*, 11, 6-13. (In Russ.)

Erovenko, V. A. (2022). “Understood mathematics” as a means of implementation concepts of cognitive technology in subject matter areas of socio-economic geography. *Russian Humanitarian Journa*l, 11(1), 25-34. DOI: 10.15643/libartrus-2022.1.2. (In Russ., abstract in Eng.)

Gorbachev, V. I. (2011). Soderzhaniye obshchego matematicheskogo obrazovaniya i matematicheskaya kartina mira. *Bulletin of the Bryansk State University*, 1, 282-294. (In Russ.)

Gorbachev, V. I. (2019). Contents of the logical-conceptual competence of general mathematical education (methodological and mathematical basis). *Science and School*, 1, 84-93. (In Russ., abstract in Eng.)

Gorbachev, V. I. (2021). Development of general and professional mathematical education in the content of the international scientific seminar at Bryansk State University. *Uchenye zapiski of the Bryansk State University*, 3(23), 7-13. (In Russ., abstract in Eng.)

Kruglov, E. V., Kruglova, S. S. (2014). Organizing students' classroom work during lectures and practical classes in mathematics. *Bulletin of N.I. Lobachevsky Nizhny Novgorod University*, 2-1, 68-71. (In Russ., abstract in Eng.)

Laukhin, V. V. (2018). The content of mathematical training of future engineers, technicians in the secondary vocational education in the context of new educational standards. *Continuum. Maths. Informatics. Education*, 4 (12), 146-153. (In Russ., abstract in Eng.)

Levin, V. M. (2015). Tekhnicheskiy progress v stroitel'stve i soderzhaniye matematicheskogo obrazovaniya budushchikh inzhenerov- issledovateley etogo napravleniya. *Collection of scientific and methodological works.* Donetsk: Donetsk National Technical University, 98-102. (In Russ., abstract in Eng.)

Plakatina, O. I. (2003). Logiko-didakticheskiy analiz sostava soderzhaniya matematicheskogo obrazovaniya. *Pedagogical University Bulletin of Altai*, 1, 103-113. (In Russ.)

Popov, A. A. (2014). Genesis of the content of mathematical education in the USSR (1940-1960-ies). *Bulletin of the Samara State University*, 5 (116), 214-219. (In Russ., abstract in Eng.)

Puchkov, N. P. (2020). Formation of mathematical style of thinking in lawyers' training. *Questions of modern science and practice. V.I. Vernadsky University*, 3(77), 153-165. DOI: 10.17277/voprosy.2020.03.pp.153-165. (In Russ., abstract in Eng.)

Roslova, L. O. (2019). On the presentation of the content of mathematical education in Federal State Educational Standards of general secondary education in the Russian Federation. *Domestic and foreign pedagogy*, 1, 6(63), 121-132. DOI: 10.24411/2224-0772-2019-10048. (In Russ., abstract in Eng.)

Smirnov, E. I. (2020). Innovatsionnoye soderzhaniye i sinergiya matematicheskogo obrazovaniya budushchego uchitelya. *Mathematical Forum (Itogi Nauki. South of Russia)*, 13, 181-232. (In Russ.)

Testov, V. A. (2015). Formation of schoolchildren’s basic mathematical notions on the basis of the funding concept. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*, 3, 48-52. (In Russ., abstract in Eng.)