

Математика и математическое образование 21-го века

А. В. Боровик

University of Manchester

Москва, семинар МГУ
«Школьное математическое образование:
содержание и аттестация»
29 сентября 2021

Несколько слов о себе

- ▶ 45 лет преподавания в России (15 лет), США, Англии, Турции (30 лет).
- ▶ Сформировался как математик и преподаватель в Советском Союзе и в российской педагогической традиции.



Несколько слов о себе

- ▶ 45 лет преподавания в России (15 лет), США, Англии, Турции (30 лет).
- ▶ Сформировался как математик и преподаватель в Советском Союзе и в российской педагогической традиции.



Заранее отвечаю на обычный вопрос:

- ▶ Из виденного на Западе, не могу рекомендовать для внедрения в российское математическое образование

НИ-ЧЕ-ГО.

Несколько слов о себе

- ▶ 45 лет преподавания в России (15 лет), США, Англии, Турции (30 лет).
- ▶ Сформировался как математик и преподаватель в Советском Союзе и в российской педагогической традиции.



Заранее отвечаю на обычный вопрос:

- ▶ Из виденного на Западе, не могу рекомендовать для внедрения в российское математическое образование **НИ-ЧЕ-ГО**.
- ▶ Перефразируя Жванецкого (кто-нибудь его еще помнит?),
*В математическом образовании, советская традиция
кроет Запад, как бык овцу.*
- ▶ В докладе, я приведу ровно одно исключение – но оно подтверждает правило.

Тематические рамки доклада

Математика и математическое образование: я имею в виду общие тенденции и проблемы в технологически развитых странах, например
в России, США, Британии, Франции, Германии ...
– но не в Турции.



Тематические рамки доклада

Математика и математическое образование: я имею в виду общие тенденции и проблемы в технологически развитых странах, например

в России, США, Британии, Франции, Германии ...

– но не в Турции.



21й век: Я придерживаюсь естественного исторического, а не календарного деления времен:

XXI век: Только что начался, с 2021 года.

XX век: 1914 – 2019, с начала Первой мировой войны.

XIX век: 1789 – 1913, с начала Великой французской революции.

Кризис математики

Йосеф Чапек и Карел Чапек, «Большая кошачья сказка», 1931:

А Нью-Йорк – ну, дома там такие высокие, что они даже не могут закончить их строить. Пока каменщики и кровельщики взберутся по лестницам, уже полдень, поэтому они съедают обед, принесенный с собой, и начинают спускаться вниз, чтобы вовремя быть в постели.

Кризис математики

Йосеф Чапек и Карел Чапек, «*Большая кошачья сказка*», 1931:

А Нью-Йорк – ну, дома там такие высокие, что они даже не могут закончить их строить. Пока каменщики и кровельщики взберутся по лестницам, уже полдень, поэтому они съедают обед, принесенный с собой, и начинают спускаться вниз, чтобы вовремя быть в постели.

- ▶ Это современная математика с точки зрения аспирантов – нет времени вскарабкаться.
- ▶ В Англии, большинство диссертаций – про искусственные «ученические» проблемы, нулевой ценности для математики.

А доказательства все труднее и длиннее...

Классификация простых конечных групп

- ▶ Объявлена в 1980 году.
- ▶ По крайней мере 100 статей, 15 000 страниц.
- ▶ Колоссальные дыры.
- ▶ **Aschbacher & Smith 2004**: залатали одну дыру, ≈ 1200 страниц, два тома.
- ▶ Современное доказательство: ожидаются 12 томов.
- ▶ С 1994-го по 2021-й год опубликовано 9 томов.

Классификация простых конечных групп

- ▶ Ключевой результат всей «конечной» математики.
- ▶ Я лично знаю всех, кто понимает доказательство.
- ▶ Из них только одна не на пенсии:

Классификация простых конечных групп

- ▶ Ключевой результат всей «конечной» математики.
- ▶ Я лично знаю всех, кто понимает доказательство.
- ▶ Из них только одна не на пенсии:



Inna Capdeboscq
(Инна Анатольевна Корчагина)

Кому нужны доказательства, которые никто не читает?

Братья Чапеки, 1923: придумали слово

Робот:

машина, созданная для замены человека как работника.



Кому нужны доказательства, которые никто не читает?

Братья Чапеки, 1923: придумали слово

Робот:

машина, созданная для замены человека как работника.



В математике:

Proof assistant, «помощник для доказательств»:

компьютерная программа, которая

- ▶ переписывает, в интерактивном процессе, неформальное доказательство как *формальный объект*,
- ▶ проверяет формальную правильность этих объектов, «доказательств».

Математика будущего

Универсальная электронная библиотека

- ▶ компьютерно проверяемых «доказательств» и «определений»,
- ▶ доступная всем «помощникам для доказательств», которые согласовывают с ней развиваемые новые определения, теоремы и доказательства.

В идеале, должны производиться также неформальные версии и объяснения, доступные пониманию человека.

Трансформация математики

Очень серьезные последствия для математики:

- ▶ Математика интимно сближается с теоретическим программированием.
- ▶ Многие области математики могут изменить язык на эквивалентный, но более удобный для новой технологии.
- ▶ Или наоборот: применение нового математического языка может потребовать компьютерных помощников для доказательств.
- ▶ На первый взгляд, это может быть изменение до полной неузнаваемости.

Примеры

- ▶ **Владимир Воеводский** и его **Унивалентные основания математики.** ↓

Примеры

- ▶ **Владимир Воеводский** и его **Унивалентные основания математики.** ↓
- ▶ **Peter Scholze** и его **Конденсированная математика.** ↓

Примеры

- ▶ **Владимир Воеводский** и его **Унивалентные основания математики.** ↓
- ▶ **Peter Scholze** и его **Конденсированная математика.** ↓
- ▶ **Zoltan Kocsis** и применение им **Edward Nelson's Теории внутренних множеств** к топологии (и многому другому).
↓

Примеры

- ▶ **Владимир Воеводский** и его **Унивалентные основания математики.** ↓
- ▶ **Peter Scholze** и его **Конденсированная математика.** ↓
- ▶ **Zoltan Kocsis** и применение им **Edward Nelson's Теории внутренних множеств** к топологии (и многому другому).
↓
- ▶ и все больше новых работ ... ↓

Примеры

- ▶ **Владимир Воеводский** и его **Унивалентные основания математики.** ↓
- ▶ **Peter Scholze** и его **Конденсированная математика.** ↓
- ▶ **Zoltan Kocsis** и применение им **Edward Nelson's Теории внутренних множеств** к топологии (и многому другому).
↓
- ▶ и все больше новых работ ... ↓

Это **новая** математика; кроме этого, были проверены на компьютерах сотни важных теорем из «старой» математики – даже это очень трудное дело.

Zoltan Kocsis

- ▶ Закончил аспирантуру раньше срока и защитился в конце 2019.
- ▶ Видимо, первый случай в истории Англии, когда доказательства в диссертации были проверены на компьютере.
- ▶ Почему? Увы, в теории внутренних множеств по-другому нельзя – человеческий мозг путается в синтаксических тонкостях.
- ▶ Почему закончил раньше? Был сманен на работу в проекте о компьютерной безопасности.
- ▶ Впервые в истории доказал **математически**, с помощью новой идеологии и технологии, что есть эффективный способ проверить, что бинарный код [микроядра 64-битного процессора] – правильный перевод его исходного кода.

Zoltan Kocsis

Слова Золтана, приведенные в пресс-релизе заказчиков,
HENSOLDT:

Extended Trustworthiness through binary verification of seL4®
microkernel on RISC-V® processor architecture, 5 May 2021:

«Проверка перевода связывает все наши усилия по проверке вместе. Применение проверки перевода для современного 64-битного процессора встречает значительные проблемы с масштабируемостью, но, в конце концов, мы смогли их преодолеть.»

Zoltan Kocsis

Слова Золтана, приведенные в пресс-релизе заказчиков,
HENSOLDT:

Extended Trustworthiness through binary verification of seL4®
microkernel on RISC-V® processor architecture, 5 May 2021:

«Проверка перевода связывает все наши усилия по проверке вместе. Применение проверки перевода для современного 64-битного процессора встречает значительные проблемы с масштабируемостью, но, в конце концов, мы смогли их преодолеть.»

На простом языке, это значит, что производство процессоров можно разместить в другой стране, и те не смогут незаметно вставить вирусов и жучков.

Масштабируемость

Как мы видим, новая математика имеет приложения **стратегической важности** в информационных и компьютерных технологиях.

Стоит упомянуть еще два направления приложений:

- ▶ ИИ, который дает не просто ответы, а ответы с доказательствами их правильности.
- ▶ Биология. Проблемы масштабируемости, которые преодолел Золтан – микроскопические по сравнению с тем, что происходит в биологии.

Биология

У меня есть недавняя (2021) статья под названием

«Взгляд математика на непостижимую неэффективность математики в биологии.»

Я там пытаюсь объяснить, почему нынешняя математика, несмотря на замечательные, но все же частичные успехи, не может решить математические по своей природе проблемы биологии **не может**.

Обратный анализ проблемы

Люди, способные работать в новой математике – стратегический ресурс нации.

Как их готовить? Я подхожу к этому вопросу на основании своего опыта практической работы.



Обратный анализ проблемы

Люди, способные работать в новой математике – стратегический ресурс нации.

Как их готовить? Я подхожу к этому вопросу на основании своего опыта практической работы.



- ▶ Нельзя ждать, что они просто как-то будут возникать.
- ▶ Давайте анализировать от цели к нынешней ситуации.
- ▶ Что полезно знать и уметь еще до поступления в аспирантуру?
 - ▶ Конечно, какое-то представление о предметной области.
 - ▶ А что еще?

На момент поступления в аспирантуру после бакалавриата

- ▶ Надо уже иметь некоторые навыки исследовательской работы в математике.
- ▶ Быть готовым работать на высочайшем уровне абстракции.

Знать, и уметь применять

- ▶ Теорию категорий
- ▶ Теорию доказательств
- ▶ Альтернативные основания математики
- ▶ Владеть программированием на языках высокого уровня (скажем, функционального программирования)

Что надо знать и уметь при поступлении в магистратуру?

Овладеть фундаментальными курсами математики (включая, конечно, логику, теорию множеств, теорию алгоритмов).

Я описываю, конечно, нечто вроде «системы МФТИ».

Что требуется от абитуриентов при поступлении на бакалавриат?

- ▶ Уверенно владеть техникой доказательств.
- ▶ Иметь навыки абстрактного мышления.
- ▶ Уверенно программировать.



Что требуется от абитуриентов при поступлении на бакалавриат?

- ▶ Уверенно владеть техникой доказательств.
- ▶ Иметь навыки абстрактного мышления.
- ▶ Уверенно программировать.



В Англии способность понимать абстрактную математику намертво убивается, в большинстве студентов, еще в школе – и навсегда.



Что требуется от абитуриентов при поступлении на бакалавриат?

- ▶ Уверенно владеть техникой доказательств.
- ▶ Иметь навыки абстрактного мышления.
- ▶ Уверенно программировать.



В Англии способность понимать абстрактную математику намертво убивается, в большинстве студентов, еще в школе – и навсегда.



Я последние годы учил

- ▶ на подготовительном отделении, студентов, которые в последние два года школы вообще не изучали математику,
- ▶ и студентов первого курса с абсолютной оценкой «А» за эти два года школы.

Абстрактное мышление – и его отсутствие

- ▶ На подготовительном отделении студенты были более обучаемы.
- ▶ Два дополнительных года обучения математике в возрасте от 16 до 18 или 19 лет как будто что-то ампутировали в мозгу у многих студентов.
- ▶ К концу бакалавриата (3 года) многие так и не понимали, что такое отношение эквивалентности.

Верхний конец спектра

При этом я был в Кембридже

«*Внешним модерирующим экзаменатором Математического Трипоса Часть 1А*»,

то есть первого курса. Я утверждал вопросы на экзаменах, а потом оценки.

Там на первом курсе проходили теорию групп и специальную теорию относительности.



Верхний конец спектра

При этом я был в Кембридже

«Внешним модерирующим экзаменатором Математического Трипоса Часть 1А»,

то есть первого курса. Я утверждал вопросы на экзаменах, а потом оценки.

Там на первом курсе проходили теорию групп и специальную теорию относительности.



В чем секрет?

- ▶ Жесткий отбор по реальному пониманию математики.
- ▶ Большинство студентов Кембриджа были из частных школ.
- ▶ Частные школы охватывают 7% студентов, казенные – 93%.

Классовое расслоение

- ▶ В международных рейтингах, Англия по школьной математике где-то на 20–30 месте.
- ▶ Частные школы, если бы они представляли отдельное государство, были бы наравне с Южной Кореей и Сингапуром.



Классовое расслоение

- ▶ В международных рейтингах, Англия по школьной математике где-то на 20–30 месте.
- ▶ Частные школы, если бы они представляли отдельное государство, были бы наравне с Южной Кореей и Сингапуром.



Мой доклад опасно приближается к проблеме социального и классового расслоения в образовании.



Классовое расслоение

- ▶ В международных рейтингах, Англия по школьной математике где-то на 20–30 месте.
- ▶ Частные школы, если бы они представляли отдельное государство, были бы наравне с Южной Кореей и Сингапуром.



Мой доклад опасно приближается к проблеме социального и классового расслоения в образовании.



Это нельзя игнорировать, это факт жизни. Но давайте проигнорируем на минуту.



Классовое расслоение

- ▶ В международных рейтингах, Англия по школьной математике где-то на 20–30 месте.
- ▶ Частные школы, если бы они представляли отдельное государство, были бы наравне с Южной Кореей и Сингапуром.



Мой доклад опасно приближается к проблеме социального и классового расслоения в образовании.



Это нельзя игнорировать, это факт жизни. Но давайте проигнорируем на минуту.



Где взять школьников необходимого уровня?

Где взять школьников необходимого уровня?

Конечно, из специализированных математических школ и классов.



Где взять школьников необходимого уровня?

Конечно, из специализированных математических школ и классов.



Более того, это, похоже, единственный путь в новую математику.



Где взять школьников необходимого уровня?

Конечно, из специализированных математических школ и классов.



Более того, это, похоже, единственный путь в новую математику.



По-счастью, в России спецшколы/классы, похоже, выжили.
Константинов и Семенов 2021:

«математические спецшколы» («матшколы») в одной из своих устойчиво воспроизводимых моделей стали важнейшим и очень продуктивным явлением в российском образовании последних десятилетий.

В Европейском Союзе спецшколы, похоже, под ударом

ЕС официально одобрил политику

«расширения доступности образования»,

то есть уравниловки. Все финансируемые государством
«элитные» школы под угрозой.

Возможная структура потока

- ▶ Аспирантура – *на переднем крае исследований!*: 3–4 года.
- ▶ Магистратура – *на основе исследований!*: 2 года.
- ▶ Бакалавриат, намного более интенсивный,
на уровне Кембриджа 3 года.
- ▶ Специализированная матшкола/класс 2–3 года.
- ▶ А что перед этим?

Нечто вроде обучения музыке

Профессионального пианиста надо учить с 5 или 6 лет.

Некоторые возможные решения:

- (a) Система дополнительных, не обязательных математических школ/классов.
- (b) Высоко профессиональные учителя, приходящие в обычную школу для проведения дополнительных уроков для желающих, включая индивидуальные уроки.

Решение (b) прекрасно долгие годы работало в английском музыкальном образовании. Никто не удивлялся, если всемирно известная рок-группа начиналась с трех 16-ти летних подростков из одной обычной средней школы (история «Арктик Манкиз»).

В любом случае, это должно быть лучше организовано и финансируемо, чем нынешние математические кружки и клубы.

Методические и учебные материалы

- ▶ В мире накоплено целое богатство учебных материалов для первоначальной математики.
- ▶ Его надо собрать, изучая при этом практику его использования, систематизировать, встроить в учебную программу.
- ▶ Пример из США: система математических кружков, созданная нашими соотечественниками; лишь несколько имен:

Julia Brodsky, Maria Droujkova, Tatiana Shubin

Сроки?

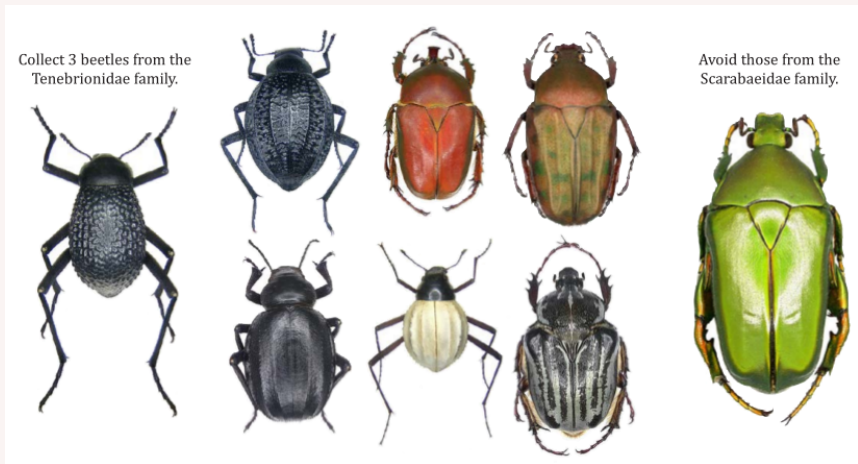
- ▶ Даже при полной политической, административной, и финансовой поддержке государства этот **новый поток** в математическом образовании вряд ли может быть создан раньше чем за 10 лет. Но мы-то говорим о 21-м веке, то есть столетии.
- ▶ В уже расколоте обществе реформа может быть очень болезненной.
- ▶ С другой стороны, острота стратегических проблем, которые призвана разрешать новая математика, чувствуется уже сейчас.
- ▶ И политики обычно не способны думать вперед на срок дальше, чем до следующих выборов.

Спасибо за внимание!

Мамфорд, 2000: Новый век будет веком стохастики

Я полностью с этим согласен, и это не противоречит всему, что я сказал раньше.

Дети лучше понимают предикаты, чем множества



Рассортируйте жуков по двум семействам.

Новая математика и New Math

New Math была попытка, в 1960–1970е годы, во многих странах, перестроить преподавание школьной математики на основании теории множеств и «математической строгости». ↓

Новая математика и New Math

New Math была попытка, в 1960–1970е годы, во многих странах, перестроить преподавание школьной математики на основании теории множеств и «математической строгости». ↓

Она позорно провалилась. Почему?

- ▶ Многочисленные дидактические просчеты: самый крупный – начинали с множеств, а не с предикатов, «*свойств*».
- ▶ Делали сразу для всех – начинать надо было с узкого «добровольного» потока.
- ▶ На этом, кстати, погибла реформа Колмогорова – «*Попытался перенести на всю страну очень успешный опыт свой школы-интерната*».

Я могу говорить очень долго – но пора остановиться.